

Capítulo 5

Modelización del crecimiento y la producción de los rodales a través de Índices de Densidad

Luis Mario Chauchard¹, Ernesto Andenmatten², Federico Letourneau²

¹Universidad Nacional del Comahue. Administración de Parques Nacionales. Argentina.

²Instituto Nacional de Tecnología Agropecuaria, Argentina.

chauchard@smandes.com.ar,

eandenmatten@gmail.com,

letourneau.federico@inta.gob.ar

Doi: <http://dx.doi.org/10.3926/oms.127>

Referenciar este capítulo

Chauchard, L.M., Andenmatten, E., Letourneau, F. (2013). Modelización del crecimiento y la producción de los rodales a través de Índices de Densidad. En J.A. Blanco (Ed.). *Aplicaciones de modelos ecológicos a la gestión de recursos naturales*. (pp. 109-124). Barcelona: OmniaScience.

1. Introducción

Una buena planificación del manejo forestal requiere proyecciones confiables de crecimiento y producción (García, 1994). El uso de las mismas, asociado con apropiados modelos de análisis económicos, permite tomar decisiones concernientes a la edad óptima de la cosecha, los niveles de renovación adecuados, los momentos de las cortas intermedias, entre otros aspectos (Clutter, Forston, Pineaar, Brister & Bailey, 1992).

El manejo forestal tiene una característica distintiva respecto de cualquier otro tipo de proceso y es que la fábrica es también el producto y el objetivo particular del mismo es encontrar el balance entre la producción y el almacenaje (Clutter et al., 1992). Los modelos de predicción de la producción son una opción para la administración de estas interrelaciones y para ello deben poder entregar las salidas cubriendo el rango completo de calidades de estación y regímenes selvícolas y así facilitar alcanzar la producción requerida (Goulding, 1994).

Los modelos forestales representan la experiencia promedio de cómo los árboles crecen y compiten y por ende de cómo las estructuras de los bosques se van modificando. Son una simplificación de algún aspecto de la realidad y en especial un modelo de crecimiento del rodal es una abstracción de la dinámica natural de un bosque y puede abarcar procesos como crecimiento, producción, mortalidad y otros cambios en la estructura del mismo. El nivel de detalle de estos modelos varía enormemente (von Gadow & Hui, 1999).

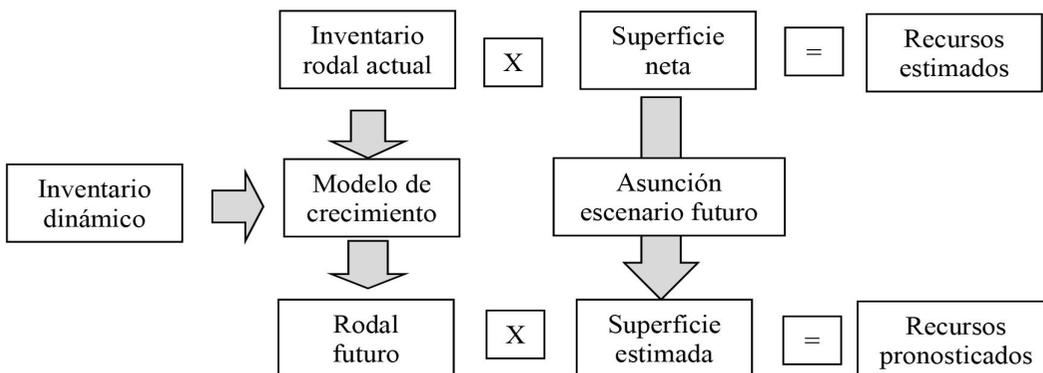


Figura 1. El rol de los modelos de crecimiento y producción asociados a datos complementarios es proveer de información para el manejo forestal (Vanclay, 1994)

La llave para el manejo forestal exitoso es un conocimiento apropiado de los procesos de crecimiento y uno de los objetivos principales de la modelización es poder comparar alternativas selvícolas. En este sentido los profesionales forestales deben ser capaces de poder anticipar las consecuencias de un particular régimen selvícola (Vanclay, 1994; von Gadow & Hui, 1999), por lo tanto, el modelado matemático del crecimiento constituye en la actualidad un requisito indispensable/indiscutido para un adecuado manejo forestal (García, 2013).

La técnica más apropiada de modelización está condicionada por la calidad y cantidad de los datos disponibles y por el nivel de resolución requerido (región, paisaje, rodal, árbol); con el aumento del nivel de la resolución de la predicción, los modelos requieren mayor información y detalle. En la modelización hay un compromiso entre el costo y la precisión (von Gadow & Hui, 1999), los modelos innecesariamente complicados resultan a menudo en mayores costos computacionales y en una pérdida de la precisión de las estimaciones (García, 1994).

Los modelos de producción forestal reflejan con variantes las distintas filosofías de modelización y niveles de complejidad matemática. Los modelos de crecimiento y producción a nivel de rodal podrían agruparse según la población meta para la cual las predicciones se aplican (Clutter et al., 1992) de la siguiente forma (Tabla 1):

1. Bosques naturales	2. Plantaciones
1.1. Irregulares	2.1. Raleadas
1.2. Regulares	2.2. No raleados

Tabla 1. Agrupamiento de los modelos de crecimiento y producción a nivel de rodal (Clutter et al., 1992)

Pero también estos modelos pueden ser categorizados a través de una aproximación de la forma de presentación (escrita o computacional) y la estructura de los datos de salida (a nivel de rodal o de árbol), según (Figura 2):

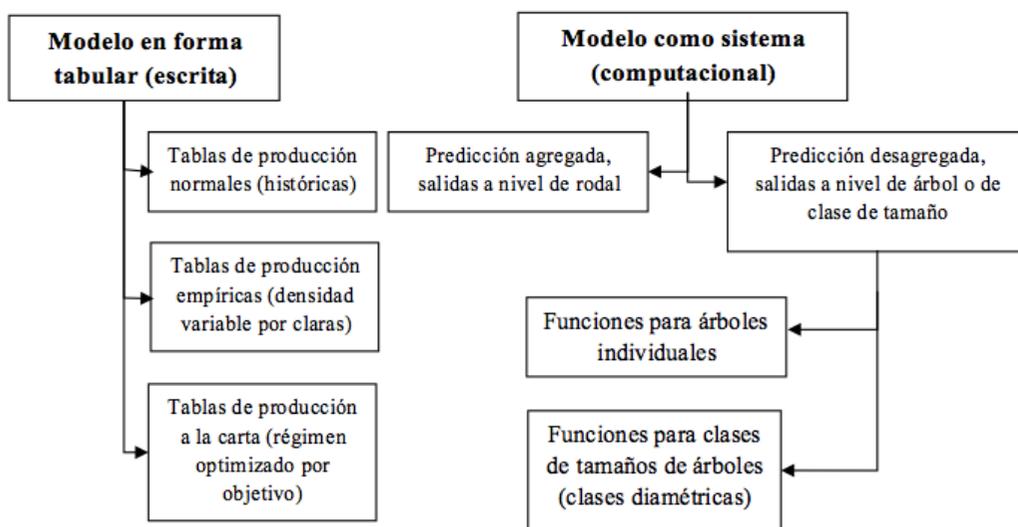


Figura 2. Categorización de los modelos según forma de presentación y estructura (Clutter et al., 1992)

Los modelos de crecimiento a nivel de rodal producen información agregada acerca del desarrollo del mismo, bajo determinadas condiciones ambientales y contemplando las modificaciones periódicas de sus atributos por las cortas y otros tipos de disturbios.

Las corrientes del modelado del crecimiento forestal han tenido diferentes enfoques, pero en las últimas décadas el concepto de espacio de estados y transiciones de la teoría general de los sistemas se ha transformado en una importante herramienta para definir la estructura de

algunos modelos de simulación forestal (Vanclay, 1994; García, 1994; Chauchard, 2001; Andenmatten & Letourneau, 2003; Nord-Larsen & Johannsen, 2007). En este concepto, el sistema es concebido como un conjunto de elementos o variables del rodal que se interrelacionan entre sí, y cuyas magnitudes expresan a cada instante los estados del sistema. El cambio entre un estado y otro del mismo estará conducido por funciones de transición. En este caso los estados están definidos por los distintos valores que adoptan las variables del mismo, como la altura dominante, el área basal, el número de árboles, los índices de densidad de rodal, etc. Las funciones de transición son las que permiten proyectar estas variables de estado a cada instante, de manera que el modelado se centra en la tasa de cambio de cada estado. De esta manera los estados futuros del rodal puedan ser predichos a partir del estado actual y no dependen de las condiciones o estados pasados (García, 1994). Un sistema así concebido entonces puede ser descrito simplemente por un conjunto de funciones de transición que permitan la proyección del estado del rodal en cada momento, cuya descripción es completada con un conjunto de funciones de salidas adicionales.

Las ideas del espacio de estados no es nueva en otras áreas de la ciencia, pero debido al desconocimiento y la fuerte tradición de algunos esquemas de modelización ha provocado que la adopción para la modelización forestal sea lenta (Burkhart & Tomé, 2012; García, 2013).

Según García (1994, 2013) puede plantearse un modelo de simulación forestal dinámico que prediga el cambio periódico, anual o infinitesimal, para cada variable de estado, como puede ser la altura dominante actuando como conductora y el área basal como variable vinculada en un espacio bidimensional; pero el modelo puede ser mejorado con la adición de una tercera variable de estado, como el número de pies, describiendo ahora el estado en un espacio tridimensional. El principio de parsimonia sugeriría no usar más variables de estado que las necesarias. Dadas estas tres variables, con adecuadas funciones de salida, se pueden estimar otras importantes variables de estado, como volúmenes de variados productos y parámetros de distribuciones diamétricas. En ausencia de disturbios como las claras, las trayectorias de las variables en el espacio de estados son establecidas por aplicación iterativa de las funciones de transición. Frente a la aplicación de claras o entresacas se establece un cambio instantáneo en el estado del rodal, que es el que se proyecta mediante las funciones de transición por el mismo proceso iterativo.

2. Espacio de estados y funciones de transición a través de vincular índices de densidad

En forma amplia, se puede definir densidad del rodal como una medida cuantitativa de la cantidad de biomasa arbórea existente por unidad de superficie. Las medidas de densidad usualmente empleadas son el número de árboles y el área basal por una unidad de superficie (Clutter et al., 1992; Mason, 2005). Sin embargo estas medidas absolutas por sí solas no son tan efectivas para expresar la ocupación del sitio si no se conoce alguna otra variable relacionada con el tamaño del rodal, que complementa a aquellas o bien se vincule en forma directa o indirecta.

En términos prácticos, esta combinación adquiere la forma de índices de densidad del rodal (*ID*), los cuales vinculan de alguna manera dos variables, una relacionada con el tamaño medio del

mismo y otra con la densidad absoluta, para entregar un valor relativo del estado de la densidad. Estos índices permiten expresar el grado de competencia de los árboles del rodal en un momento dado. Además de emplear variables de sencilla medición, los índices de densidad tienen la particularidad de ser relativamente independientes de la calidad de estación (Prodan, Peters, Cox & Real, 1997; Zeide, 2005), que constituye la expresión de la potencialidad productiva de una especie en un sitio dado.

Para la planificación y gestión selvícola es necesario disponer de mediciones confiables de la densidad del rodal que permitan controlar la competencia entre los árboles y así garantizar y eventualmente incrementar la producción del mismo. Si no se tiene la capacidad de medir la densidad, no es posible controlar el régimen selvícola y por lo tanto lograr optimizar el objetivo productivo buscado (Zeide, 2005).

Cuando se analiza la evolución de los diversos ID, casi todos ellos tienden a un valor máximo en donde se estabilizan, fenómeno sustentado en el principio biológico del autoclareo de los rodales regulares bajo condiciones de alta competencia intra-específica (Reineke, 1933; Yoda, Kira, Ogawa & Osumi, 1963). Dicho principio se apoya en expresar la competencia de las masas a través de la densidad relativa y sostiene que cuando un rodal ha alcanzado el valor máximo de carga se autorregula mediante el proceso de mortalidad natural, manteniendo el rodal en valores de densidad relativa máxima. En esta frontera del crecimiento biológico puede esperarse que la mortalidad natural ocurra a una tasa relativamente constante, como por ejemplo la pendiente de la relación de Reineke. En cambio, si el análisis se realiza sobre la evolución del ID respecto de alguna variable relacionada con el tiempo, como la altura, la mortalidad natural se expresa cuando el índice alcanza una meseta o estabilización en dicha evolución (Figura 3).

Sin embargo, es importante saber que un ID por sí solo no puede describir adecuadamente la estructura del rodal, aunque permita inferir el nivel de competencia. La asunción de que el grado de ocupación del sitio es una función del tamaño del árbol y la densidad tiene sus limitaciones. Dos rodales con las mismas características de los fustes pueden diferir en el grado de ocupación, por ejemplo, si sólo uno de ellos ha sido recientemente clareado y/o podado (García, 1990).

Con el fin de modelizar el crecimiento y la producción de plantaciones de *Pseudotsuga menziesii* en Argentina, Andenmatten et al. (1997) comenzaron un estudio en el que se analiza el comportamiento de dos índices de densidad, la Densidad Relativa (DR) (Curtis, 1982), y el Factor de Espaciamiento Relativo (FE), Hart-Becking o Wilson (Day, 1985; Prodan et al., 1997), con el fin de vincularlos funcionalmente (Func. 1 y 2, respectivamente). Para favorecer la comparación y vinculación se invirtió el Factor de Espaciamiento, según la equivalencia (2) y con ello se logró que la evolución del índice se transforme en creciente, situación que simplifica la comparación con la Densidad Relativa. Al hacer ello se obtiene un nuevo índice, derivado de aquel, que se lo denomina con un sentido lógico como Factor de Altura (FH), para diferenciarlos. Para analizar las evoluciones de ambos índices emplearon las salidas del simulador TASS (Mitchell & Cameron, 1985), con la misma especie, utilizando la altura dominante para expresar el paso del tiempo. Encontraron que ambos índices alcanzan valores máximos, que se estabilizan, a una misma altura dominante o tamaño del rodal, e interpretaron que los mismos estarían indicando la mortalidad inminente por competencia. El hecho que esto ocurra a una misma altura dominante, señala la coherencia con el fenómeno de mortalidad y la posibilidad de vinculación entre ambos índices (Figura 3).

$$DR = \frac{G}{Dg^{0.5}} \quad (1)$$

Dónde:

DR: Índice de Densidad Relativa.

G: Área basal del rodal [m^2/ha].

Dg: Diámetro promedio cuadrático [cm].

$$FE = \frac{e}{H_o} \Rightarrow FH = \frac{1}{FE} = \frac{H_o}{e} = \frac{H_o \cdot \sqrt{N}}{100} \quad (2)$$

Dónde:

FE: Índice de Espaciamiento relativo.

e: Espaciamiento medio de los árboles [m^2].

Ho: Altura dominante del rodal [m].

FH: Índice Factor de Altura dominante.

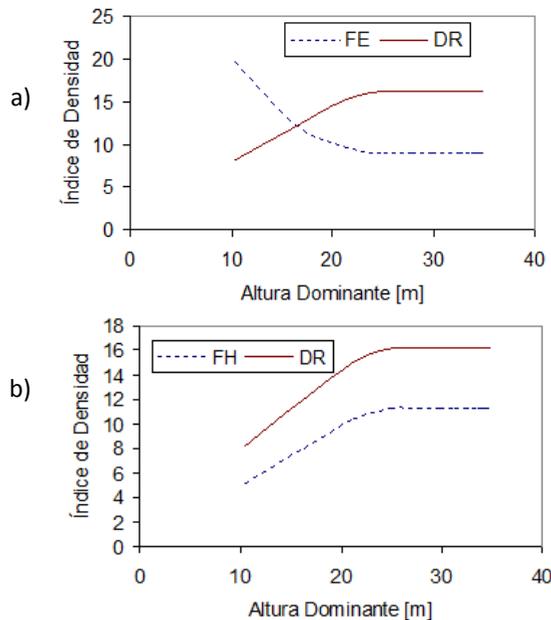


Figura 3. (a) Evoluciones de la Densidad Relativa (*DR*) y el Factor de Espaciamiento (*FE*) y (b), de la Densidad Relativa y el Factor de Altura (*FH*). Al invertir el *FE*, transformándose en otro índice, denominado Factor de Altura (*FH*), se logra que el índice sea creciente con el desarrollo del rodal y facilite la comparación con *DR* (Andenmatten et al., 1997). La línea vertical indica la altura a la cual los índices alcanzan el máximo.

Para estudiar la evolución de los índices de densidad de masas regulares en el tiempo, se ha reemplazado la edad por la altura dominante, ya que ésta constituye una de las variables de estado que además de involucrar implícitamente el paso del tiempo, indica la capacidad de crecimiento del rodal. Además, en el sistema planteado la altura dominante para una estación determinado, está funcionalmente relacionada con la edad, pudiendo reemplazarse entonces una por otra (García, 1994).

Con estos estudios se postuló que para cada especie cuando los índices mencionados alcanzan los máximos, existe una relación directa y constante entre ambos (Figura 3b) que se la denominó F y queda expresada de la siguiente manera:

$$\frac{DR}{FH} = F \Rightarrow DR = F.FH \quad (3)$$

A partir de esta interpretación, surgió la hipótesis que sugiere que la misma relación estable (F en Figura 4) entre los índices, cuando se alcanzan los máximos biológicos en el rodal, puede aplicarse a la etapas previas de desarrollo del mismo, como un un **factor de proporcionalidad** que se mantiene a lo largo de la vida del rodal (F_0 en Figura 4).

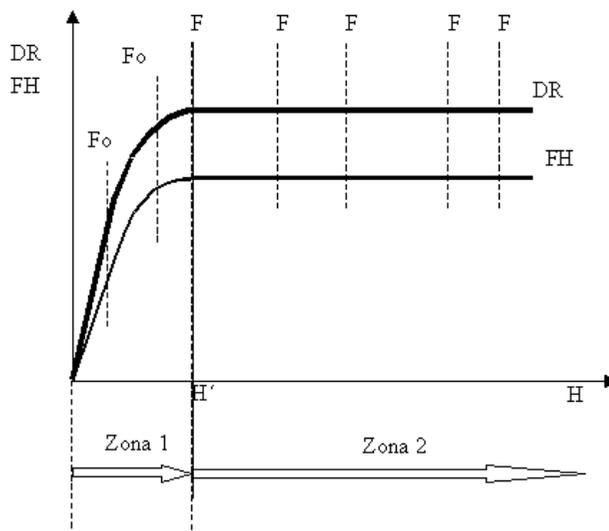


Figura 4. Hipótesis de evoluciones de la DR y el FE a lo largo de la vida del rodal. La Zona 1 expresa un crecimiento de los valores de los índices, mientras que la Zona 2 la de la maximización de los índices y la fase de autoaclareo. El postulado establece la igualdad entre F_0 y F y que los máximos se alcanzan en el mismo momento. Alcanzados los máximos, el rodal se mantendrá en un estado de equilibrio dinámico, regulado por competencia intra-específica (Andenmatten, 1999)

Esta vinculación permite formular un modelo de estado basado en que, si resulta sencillo predecir la evolución del Factor de Altura (FH) con una adecuada función de crecimiento en altura, debiera ser simple predecir la evolución de la Densidad Relativa (DR), a partir de establecer una relación funcional entre ambos. En este caso la función de altura dominante

actúa como directriz o conductora del modelo, mientras que la variable número de pies no variará en cortos períodos de tiempo y puede ser controlada mediante las claras inducidas por el silvicultor. Habitualmente las proyecciones con los modelos se hacen para intervalos cortos no mayores a 10 años, suficientes para controlar los efectos de corto plazo. Esto permite aplicar el supuesto de que no existirá mortalidad y por lo tanto se evita la necesidad de ajustar una función para estimar el número de individuos sobrevivientes (Andenmatten, 1999). A pesar de ello no se pueda ignorar el proceso de mortalidad y debería poder predecirse su impacto en la densidad para la modelización de la selvicultura de rodales sin claras o con bajos pesos de las mismas.

Por lo tanto para un período de tiempo dado y bajo la hipótesis de proporcionalidad directa entre ambos índices de densidad, una relación de transición se puede escribir a partir de la ecuación (3), de la siguiente forma:

$$F = \frac{DR_{\text{máximo}}}{F_{\text{máximo}}} = \frac{DR_i}{FH_i} \quad (4)$$

Dónde:

F : Factor de proporcionalidad.

Entonces para cualquier momento se puede expresar (4) también como:

$$\frac{DR_2}{DR_1} = \frac{FH_2}{FH_1} \quad (5)$$

La igualdad (5) ya es una función de transición, sin embargo a partir de (3) es posible expresar la función de transición por diferencia matemática de la misma en dos momentos dados del rodal, de la siguiente manera:

$$DR_2 = DR_1 + F(FH_2 - FH_1) \quad (6)$$

2.1. Determinación del parámetro de transición F

Un aspecto al que los autores han prestado especial atención, es al valor del factor de proporcionalidad F para un mismo rodal; a través de las sucesivas mediciones en el tiempo, el valor de F tiende a estabilizarse (Figura 3b), lo que les indujo a plantear la precedente función de transición (6), donde el término $F \times (FH_2 - FH_1)$ constituye el producto que expresa el crecimiento de la DR_1 en el período de proyección considerado. Para que la función de transición (6) pueda aplicarse en cualquier momento de la vida del rodal implica que la proporcionalidad que vincula los ID debe mantenerse a lo largo del desarrollo de un rodal regular.

Andenmatten (1999) trabajando con plantaciones de *Pseudotsuga menziesii* y posteriormente Andenmatten & Letourneau (2003) con plantaciones de *Pinus ponderosa* de la región Patagonia Andina de Argentina, establecieron una forma para determinar los valores máximos de ambos índices para las especies y con ello definir la constante de proporcionalidad entre los índices.

Establecen estos máximos a partir de sumarle dos desvíos estándar al promedio obtenido con la muestra disponible de cada índice de densidad. Los resultados mostraron que las distribuciones de frecuencias de ambos índices son normales. Los valores máximos para la región estudiada resultaron para *P. ponderosa* en una *DR* de 21,5 y para el *FH* de 10,4, por lo tanto el valor del parámetro *F*, obtenido por el cociente entre ambos, fue de 2,06. Por otro lado, para *P. menziesii*, los valores máximos de los índices fueron de 18,0 y 13,6, respectivamente, resultando en un valor de *F* de 1,32.

Para probar esto, los autores realizaron pruebas con la especie *Pseudotsuga menziesii* proyectando la función de transición con el parámetro ajustado para la misma, para cortos y variables períodos de tiempo con 31 parcelas permanentes de rodales que variaron en edades y estructuras, obteniendo en 29 de ellas errores inferiores al 10%. También realizaron una validación con las salidas del simulador TASS para la misma especie, publicadas por Mitchell y Cameron (1985), bajo una gran variedad de situaciones, con y sin aplicación de claras y largos de períodos de tiempo, obteniendo errores del orden del 6-7%. Las pruebas realizadas no rechazaron la hipótesis de proporcionalidad, con lo cual se pudo avanzar en la propuesta de modelamiento de la producción vinculando los índices de densidad y utilizando un factor de proporcionalidad *F* propio de la especie y zona de crecimiento.

Posteriormente se aplicaron los mismos conceptos para masas de *Pinus radiata* en el País Vasco de España, logrando buenos resultados para el modelado del crecimiento y la producción (Chauchard, 2001). A diferencia de las experiencias en Argentina, el parámetro *F* se estableció ajustando una función lineal entre los pares de datos *FH* – *DR* de un conjunto de parcelas temporales de varios inventarios. Se encontró que con una precisión del 75% la dispersión entre ambas variables se podía explicar con la función de la recta (7) (Chauchard, 2001; Chauchard & Andenmatten, 2009).

$$DR = -0,69429 + 1,31848 \cdot FH \quad (7)$$

Operando matemáticamente la ecuación (7) en dos momentos de tiempo consecutivos se obtiene la misma ecuación (6). Sin embargo, posteriormente se estudian los cambios de ambos índices en períodos sucesivos en 34 parcelas permanentes de *Pinus radiata* para períodos de 5 a 6 años en rodales de distintas edades y densidades. En estas condiciones, el parámetro *F* presentó un valor promedio de 1,6275, con un error relativo en la proyección del área basal de aproximadamente el 7% (Chauchard, 2001). De esta manera, la tasa de cambio de la ecuación (6) quedó expresada como 1,6275 ($FH_2 - FH_1$), que fue la que finalmente se empleó para el desarrollo del modelo de crecimiento y producción.

2.2. Determinación del área basal de rodal

A través de proyectar la *DR* con la función directriz (*Ho*) y el control del número de pies (*N*), es posible entonces determinar el área basal (*G*) en dos momentos distintos del crecimiento del rodal. Efectivamente es posible despejar *G* de la función (1); Andenmatten (1999) resolvió matemáticamente el despeje, sin tener que conocer el diámetro medio del rodal (*Dg*) y con ello evitar el desarrollo de funciones para su estimación. Resolvió la simplificación de la siguiente manera (Chauchard, 2001):

Partiendo de un determinado DR y N , se tiene, operando matemáticamente con G , la siguiente igualdad:

$$DR = \frac{G}{Dg^{0,5}} = \frac{G^{0,75} \times G^{0,25}}{D_g^{0,5}} = \frac{G^{0,75} \times \left[N \cdot 0,7854 \times \left(\frac{D_g}{100} \right)^2 \right]^{0,25}}{D_g^{0,5}} =$$

De esta manera se puede introducir Dg en el numerador:

$$DR = \frac{G^{0,75} \times (N \cdot 0,7854)^{0,25} \times D_g^{0,5}}{D_g^{0,5} \times 10} \quad (8)$$

Con ello en (8) ya se puede eliminar $Dg^{0,5}$ y entonces despejar G , quedando:

$$G = \left[\frac{10 \cdot DR}{(0,7854 \cdot N)^{0,25}} \right]^{1,333} \quad (9)$$

En este esquema, ya se está en condiciones de describir el estado del rodal a través de la altura dominante, el área basal y el número de pies, controlado por la aplicación de claras y/o una función de mortalidad, según el caso.

Recientemente, Letourneau, Rocchia, Andematten, Oliva, Casado y Del Val (2013) aplicaron la ecuación (9) para estimar la precisión de las proyecciones de corto plazo del área basal de plantaciones de *Pinus ponderosa* creciendo en un amplio rango de calidades de estación y densidades, sin la aplicación de claras recientes. Se empleó la función que vincula los índices de densidad (función 6), ajustada para la especie y encontraron que los errores de las estimaciones se distribuían normalmente con una media de cero y un desvío estándar de $\pm 3\%$.

Empleando las series de crecimiento de *Pinus radiata* provenientes de un diseño de tratamientos de claros tempranos e intensos para regímenes directos en Nueva Zelanda (White & Woollons, 1990), se ajustó la función (6) con el fin de analizar la flexibilidad para expresar los patrones de crecimiento de cada tratamiento. Los ensayos se siguieron entre los 7 y 24 años, con mediciones periódicas. Se establecieron las evoluciones de los índices de densidad para cada ensayo y se ajustó un valor promedio del parámetro F para todos los ensayos. La precisión se midió en área basal, empleando la altura dominante real de cada tratamiento como variable directriz de la proyección. El parámetro F resultó en un valor de 1,28217 y los errores para todos los ensayos fueron menores al 10%, excepto para los últimos periodos de los regímenes de 600 y 700 pies/ha que alcanzaron el 12% de error (Tabla 2). Los resultados han mostrado la gran flexibilidad de una función de transición de estructura lineal simple para expresar los patrones de crecimientos de los diferentes ensayos (Figura 5), señalando además la robustez para actuar como motor de un modelo de crecimiento.

Edad (años)	Número de pies/ha a los 7 años					
	700	600	500	400	300	200
7	Parámetros de partida igualados (área basal)					
12	-4%	-4%	-5%	-5%	-1%	-5%
15	-5%	-3%	-4%	-3%	-1%	-4%
18	0%	-1%	-3%	-3%	-2%	-7%
22	6%	10%	3%	2%	0%	0%
24	12%	12%	5%	4%	1%	2%

Tabla 2. Errores porcentuales de proyectar áreas basales iniciales (a los 7 años) en ensayos de claros intensos en plantaciones de *Pinus radiata* en Nueva Zelanda (White & Woollons, 1990). Se empleó la función de transición (6) con el parámetro F ajustado para todos los ensayos y empleando las alturas dominantes reales como directriz e integrante de unos de los índices de densidad.

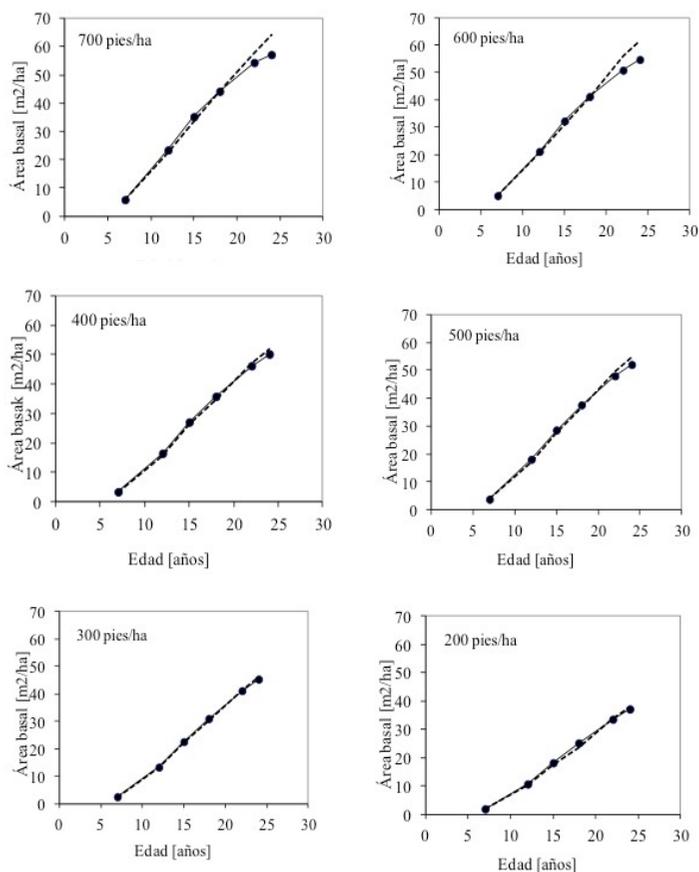


Figura 5. Proyección del área basal inicial a los 7 años con la función de transición (6) de seis ensayos de claros intensos para *P. radiata* en Nueva Zelanda (White & Woollons, 1990). El parámetro F es el promedio ajustado para todos los ensayos. La línea de trazo representa la evolución del área basal real de los tratamientos.

2.3. Incorporación del volumen en el modelado del espacio de los estados

El esquema general para desarrollar un modelo que permita proyectar la estructura del rodal se basa en emplear una función de crecimiento en altura dominante, como función directriz, y sobre ella se apoya una función corazón del modelo, como la función de transición (6), que estima las variables de estado del rodal a cada momento. Con los parámetros de las principales variables del rodal establecidos en cualquier momento, otras variables de estado importantes como los volúmenes totales y maderables, se pueden estimar con adecuadas funciones de salida, tanto a nivel de árbol individual como a nivel de rodal.

Sin embargo, es posible modelar el volumen del rodal con la utilización de los ID y un vínculo entre ellos, a partir del empleo de una función de salida propuesta por Mitchell y Cameron (1985). Estos autores proponen una función para estimar el volumen del rodal incorporando el índice Densidad Relativa, de la siguiente forma:

$$V = a H_o^b DR^c \quad (10)$$

Donde:

V : Volumen del rodal [m^3/ha].

H_o : Altura dominante [m].

DR : Índice de Densidad Relativa.

a, b, c : Parámetros particulares.

La función (10) contiene las tres variables de estado, altura dominante y área basal del lado derecho, ésta como parte integrante de DR y el volumen total por unidad de superficie, como salida del lado izquierdo. Además, esta ecuación (10) al incorporar el índice Densidad Relativa facilita el acople directo con la función de transición (6), con lo que se logra dos efectos importantes, por un lado incorporar la variable de estado número de pies y por el otro poder proyectar el volumen del rodal entre dos momentos, de la siguiente manera:

$$V_1 = a \times H_{o1}^b \times DR_1^c \quad (11)$$

$$V_2 = a \times H_{o2}^b \times DR_2^c = V_2 = a \times H_{o2}^b \times (DR_1 + F \times (FH_2 - FH_1))^c \quad (12)$$

La función (12) permite estimar el volumen del rodal al final de cualquier período por proyección del estado inicial del mismo, para ellos se requiere una función directriz de crecimiento en altura

dominante y para períodos de proyección en el cual hay control del número de pies/ha. En este caso el volumen total integra directamente las funciones de transición, en vez de integrar una función de salida que se aplique sobre los estados del rodal proyectados previamente por otras funciones de transición. La función de transición en volumen también se podría re-escribir, haciendo el cociente entre V_2/V_1 y sus equivalencias del lado derecho y despejar V_2 .

En estas condiciones ya es posible representar el volumen en las trayectorias o transiciones de los estados del rodal en un espacio tridimensional.

Andenmatten & Letourneau (2003) diseñaron un modelo basado en la función (12), para simular la producción de masas de *Pinus ponderosa* en Patagonia, Argentina. Emplearon 87 parcelas para establecer el espacio tridimensional de estados y luego evaluaron los errores de proyección, empleando la función de transición (12), utilizando 15 parcelas permanentes, para períodos de 2 a 8 años. Del análisis obtuvieron un error promedio absoluto en la estimación del volumen final del rodal del 3%, con un sesgo del +3%, mientras que el error máximo obtenido ocurrió en una parcela con una subestimación del -7%.

Posteriormente se aplicó la función (12) para modelar el espacio de estados empleando la altura dominante y la DR para plantaciones de *Pinus elliottii* en la provincia de Córdoba, Argentina. En la Figura 6 se ejemplifica, a partir de datos de 96 parcelas, el espacio tridimensional de estados empleando dichas variables y la superficie de respuesta ajustada.

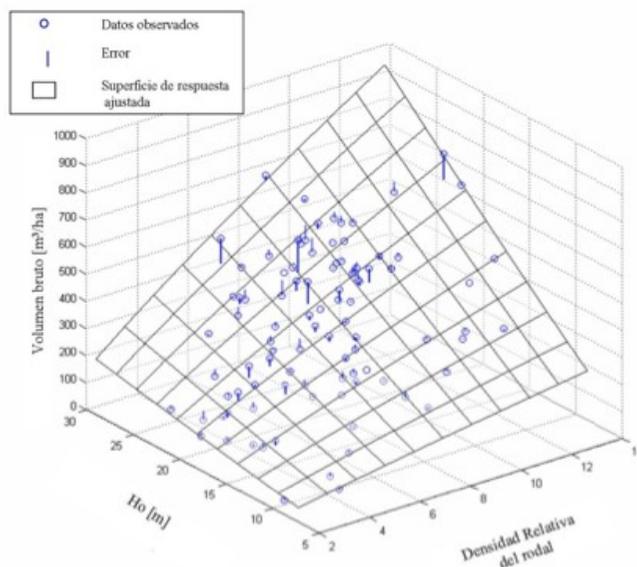


Figura 6. Modelado del espacio tridimensional de los estados con base en la función (12) para *P. elliottii* en la provincia de Córdoba, Argentina. Sobre la superficie de respuesta ajustada se muestran los desvíos en cada punto de la muestra (Andenmatten, Letourneau y De Agostini. INTA- Proyecto de investigación: "Funciones e Índices de densidad para el manejo de *Pinus elliottii* y *P. taeda* en el Valle de Calamuchita, Córdoba", Argentina. Datos no publicados).

3. Reflexiones finales

El desafío es desarrollar modelos que sean suficientemente realistas y al mismo tiempo matemáticamente tratables. Considerando que con una ecuación de la recta entre dos índices de densidad se logra involucrar las principales variables de estado del rodal y expresar la transición en un período dado de las mismas, se considera que la propuesta presentada se aproxima a la meta de simplicidad y robustez expresada para la modelización.

La función (6) posee varias peculiaridades buscadas en la modelización, entre las cuales están las propiedades que deben tener las funciones de transición (García, 1994; Chauchard, 2001):

- **Simplicidad:** a través de la ecuación de la recta se logra proyectar las principales variables de estado del rodal: área basal (G), diámetro promedio (Dg), altura dominante (H_o) y número de árboles (N). A la vez la variable N aparece como factor común en ambos miembros y se la cita como la variable vínculo entre ambos índices.
- **Consistencia:** si el tiempo transcurrido es nulo, el estado inicial y final son idénticos.
- **Composición:** el resultado de proyectar el estado inicial en t_0 hacia un momento posterior t_1 y luego este nuevo estado proyectarlo hasta t_2 , es el mismo que si la proyección se realiza directamente desde t_0 a t_2 .
- **Causalidad:** en un período cualquiera un cambio en el estado puede ser causado por actuaciones ocurridas dentro de dicho período y no por eventos ocurridos fuera de él.
- **Productividad:** hay consistencia con la teoría de la producción final común, que postula que bajo un amplio rango de densidades iniciales, los rodales sin intervenciones arribarán a las mismas densidades finales. La función permite arribar al mismo valor asintótico para diferentes densidades iniciales (Figura 7).

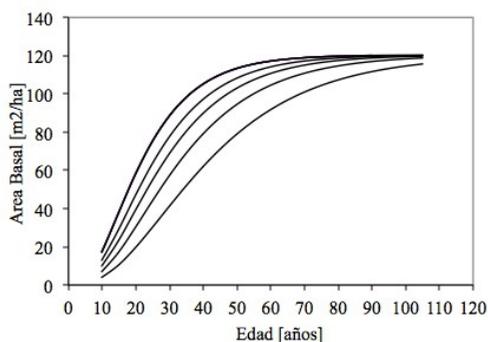


Figura 7. Proyección de cinco densidades iniciales diferentes en área basal [m^2/ha], empleando la función de transición (6) desarrollada para *Pinus radiata* como hipótesis, para un largo período de tiempo y sin aplicación de claras (Chauchard, 2001).

Finalmente, el desafío actual consiste en definir las fronteras de la selvicultura para la utilización de un único valor del parámetro de proporcionalidad F entre los índices de densidad. Ello implica profundizar la investigación sobre el impacto de las claras severas sobre el parámetro, que significa evaluar el impacto mismo sobre las evoluciones de los índices o el estado del rodal y que determinará en definitiva, la calidad de las predicciones finales sobre la producción de un régimen selvícola.

Referencias

Andenmatten, E., Letourneau, F., & Ortega, A. (1997). Vínculo entre Densidad Relativa y Factor de Espaciamento y su Relación con la Altura Dominante. *Actas Simposio IUFRO*. Valdivia, Chile.

Andenmatten, E. (1999). *Proyección de Tablas de Rodal para Pino Oregón en la Región Andino Patagónica de la Provincias de Chubut y Río Negro, Argentina*. Tesis de Magister en Ciencias. Inédito. Valdivia, Chile.

Andenmatten E., & Letourneau, F. (2003). Predicción y proyección del rendimiento de pino ponderosa en las provincias de Chubut y Río Negro, Argentina. *Rev. Quebracho*, 10, 14-25.

Burkhardt, H., & Tomé, M. (2012). *Modeling Forest Trees and Stands*. Springer. <http://dx.doi.org/10.1007/978-90-481-3170-9>

Chauchard, L. (2001). *Crecimiento y producción de repoblaciones de Pinus radiata D. Don en el Territorio Histórico de Gipuzkoa, País Vasco*. Pub. País Vasco, Vitoria, España. Tesis Doctorales N| 40, 173 p.

Chauchard, L., & Andenmatten, E. (2009). Vínculos entre Índices de Densidad: una aproximación para la modelización en rodales de *Pinus radiata*. *Acta XIII Cong. Ftal Mundial. Resumen. Buenos Aires, Argentina*.

Clutter, J., Forston, J., Pineaar, L., Brister, G., & Bailey, R. (1992). *Timber Management: A Quantitative Approach*. Ed. Krieger Pub. Com. (reditado), 333 p.

Curtis, R. (1982). A simple index of stand density for Douglas –fir. *For. Sc.* 27(1), 92-94.

Day, R. (1985). Crop Plans in Silviculture. Lakehead Univ. Sch. *For. Rep.* W.S.I. 2975 (F-4) ODC 624. Ontario, Canadá.

García, O. (1990). Growth of thinned and pruned stands. Proceedings of a IUFRO Symp. Min. of For. N.Z. *Bulletin*, 1451, 84-97.

García, O. (1994). The State -Space approach in Growth Modelling. *Can. Jour. For. Res.* 24, 1984-1903. <http://dx.doi.org/10.1139/x94-244>

García, O. (2013). Forest Stands as Dinamical Systems: An Introduction. *Modern App. Sc.* 7(5), 32-38. Chile. <http://dx.doi.org/10.5539/mas.v7n5p32>

Goulding, C.J. (1994). Development of growth models for *Pinus radiata* in New Zealand – experience with management and process models. *Forest Ecology and Management*, 69, 331-343. [http://dx.doi.org/10.1016/0378-1127\(94\)90239-9](http://dx.doi.org/10.1016/0378-1127(94)90239-9)

Letourneau, F., Roccia, A., Andematten, E., Oliva, E., Casado, J., & Del Val, J. (2013). Simulación del crecimiento en plantaciones de *Pinus ponderosa* (Dougl.) Lawx, de la empresa CORFONE S.A. mediante el simulador Piltriquitron de INTA. *Actas 4° Cong. Ftal. Arg. y Latinoamericano*, Iguazú, Argentina. 7p.

Mason, E.G. (2000). *A brief review of the impact of stand density on variables affecting radiata pine stand value*. Disponible internet.

Mitchell, K., & Cameron, I. (1985). Managed Stand Yield Tables for Coastal Douglas-fir: Initial Density and Precommercial Thinning. *B.C. Min. Of For. Res. Branch*. Victoria. 69 p.

Nord-Larsen, T., & Johannsen, V. (2007). A state-space approach to stand growth modelling of European beech. *Ann. For. Sci.*, 64, 365–374. <http://dx.doi.org/10.1051/forest:2007013>

Prodan, M., Peters, R., Cox, F., & Real, P. (1997). *Mensura Forestal*. IICA. 512 p.

Reineke, L. (1933). Perfecting a Stand density index for even-aged forests. *J. Agric. Res.*, 46, 627-638.

Vanclay, J. (1994). *Modelling Forest Growth and Yield-Application to Mixed Tropical Forests*. CAB International. 312 p.

von Gadow, K., & Hui, G. (1999). Modelling forest Development. Kluwer Ac. *Pub. For. Sc.*, 57. 213 p. Londres.

White, A.G.D., & Woollons, R.C. (1990). Modelling stand growth of radiata pine thinned varying densities. *Can. Jour. For. Res.*, 20, 1069-1076. <http://dx.doi.org/10.1139/x90-142>

Yoda, K., Kira, T., Ogawa, H., & Osumi, K. (1963). Self-Thinning in overcrowded pure stand under cultivated and natural conditions. *Jour. Biol.*, 14, 107-129.

Zeide, B. (2005). How to measure stand density. *Trees*, 19, 1-14. <http://dx.doi.org/10.1007/s00468-004-0343-x>