

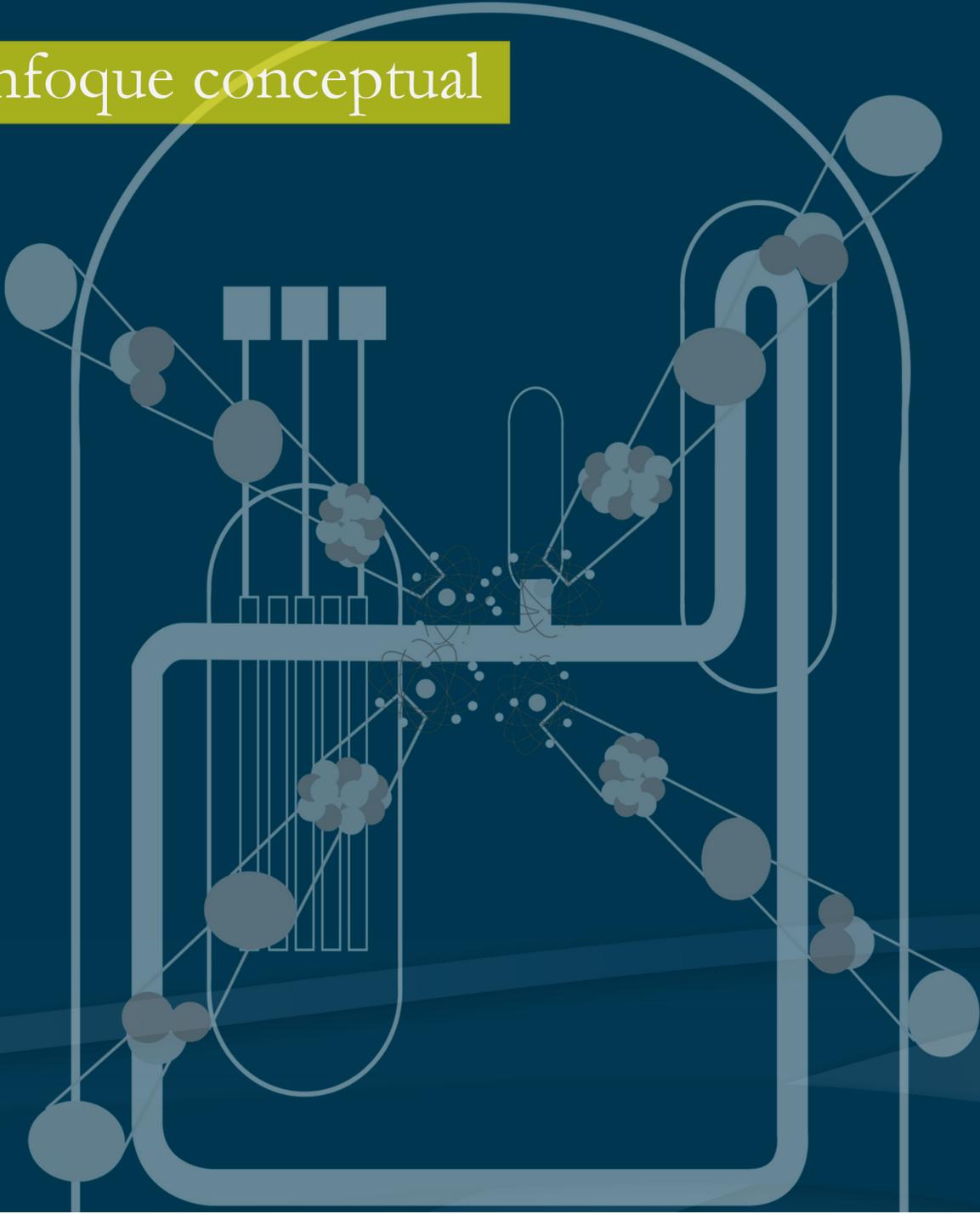
Gilberto Espinosa-Paredes, Rodolfo Vázquez Rodríguez

Física de Reactores Nucleares I



Un enfoque conceptual

OmniaScience
Scholar



FÍSICA DE REACTORES NUCLEARES I UN ENFOQUE CONCEPTUAL

GILBERTO ESPINOSA-PAREDES

RODOLFO VÁZQUEZ RODRÍGUEZ

Open Access Support

Si encuentra este libro interesante le agradeceríamos que diera soporte a sus autores y a OmniaScience para continuar publicando libros en Acceso Abierto.

Puede realizar su contribución en el siguiente enlace: <http://dx.doi.org/10.3926/oss.27>

Física de reactores nucleares I: Un enfoque conceptual

Autores:

Gilberto Espinosa-Paredes, Rodolfo Vázquez Rodríguez

Universidad Autónoma Metropolitana Iztapalapa, México



ISBN: 978-84-943418-4-7

DOI: <http://dx.doi.org/10.3926/oss.27>

© OmniaScience (Omnia Publisher SL) 2016

© Diseño de cubierta: OmniaScience

© Imagen de cubierta: Javier Centeno Pérez

OmniaScience no se hace responsable de la información contenida en este libro y no aceptará ninguna responsabilidad legal por los errores u omisiones que puedan existir.

ÍNDICE

Prólogo	V
Capítulo 1. Revisión de conceptos de física nuclear	1
1.1. Estructura nuclear	1
1.2. Equivalencia masa-energía	3
1.3. Decaimiento radioactivo	4
1.4. Probabilidades y tasa de decaimiento radioactivo	6
1.5. Decaimiento compuesto	10
1.6. Reacciones nucleares	11
Problemas y preguntas para el capítulo 1	13
Capítulo 2. Interacción de neutrones con la materia	15
2.1. Reacciones con neutrones	15
2.2. Probabilidades de reacción	21
2.3. Sección eficaz	22
2.4. Distribución de Maxwell	25
2.5. Pérdida de energía en colisiones elásticas	29
2.6. Letargia	33
2.7. Razón de moderación y potencia de moderación	35
Problemas y preguntas para el capítulo 2	38
Capítulo 3. Multiplicación de neutrones	41
3.1. Factor de multiplicación infinito	41
3.2. Factor de multiplicación efectivo	43
Problemas y preguntas para el capítulo 3	45
Capítulo 4. Difusión de neutrones	47
4.1. Flujo de neutrones	48

4.2.	La ley de Fick	51
4.3.	Rangos de validez de la ley de Fick	56
4.4.	La ecuación de continuidad	59
4.5.	Condiciones de frontera	64
4.6.	Ejemplos de solución de la ecuación de difusión	69
4.7.	Longitud de difusión.	80
4.8.	El método de difusión de grupos (Teoría de multigrupos)	82
4.9.	Difusión de neutrones térmicos.	85
4.10.	Cálculo de dos grupos en la moderación de neutrones.	91
	Problemas y preguntas para el capítulo 4.	104
Capítulo 5. Teoría del reactor nuclear		107
5.1.	Neutrones de fisión.	107
5.2.	El factor η	108
5.3.	El término de fuente (S) en la ecuación de difusión.	110
5.4.	El reactor en forma de placa (dependiente del tiempo)	112
5.5.	La ecuación del reactor.	119
5.6.	Reactor homogéneo, desnudo y de forma de paralelepípedo rectangular.	120
5.7.	La ecuación crítica para un grupo de energía	127
5.8.	Reactores térmicos	131
5.9.	Aplicaciones	136
5.10.	Reactores con reflector.	141
5.11.	Reactores heterogéneos	151
	Problemas y preguntas para el capítulo 5.	155
Anexo. Mapas conceptuales para cálculos de criticidad		157
	Mapa conceptual 1	159
	Mapa conceptual 2	160
	Mapa conceptual 3	161
	Mapa conceptual 4	162
	Mapa conceptual 5	163
	Mapa conceptual 5.1	164
	Mapa conceptual 6	165
Bibliografía		167
Índice de términos		169
Autores.		171

PRÓLOGO

Hace más de treinta años, durante mis estudios de licenciatura en el Instituto Politécnico Nacional en la Ciudad de México, tuve el primer contacto con la ingeniería nuclear con la finalidad de incorporarme al programa nuclear que México estaba desarrollando a través de la construcción de la central nuclear de Laguna Verde. Fueron varias generaciones que siguieron el mismo camino y actualmente contribuyen con su conocimiento a la operación de la central nuclear, como reguladores, o bien como investigadores y/o profesores. Estas generaciones tuvieron algo en común; la bibliografía recomendada se limitaba a sólo unos cuantos libros de texto, los cuales básicamente se han mantenido a lo largo de todo este tiempo sin que haya una nueva referencia que refresque la ya tradicional lista de textos clásicos en la materia. Por lo anterior doy la bienvenida al presente libro de texto que es una opción más para que los estudiantes de ingeniería nuclear de habla hispana puedan consultarlo en su propio idioma.

El presente libro es el resultado de la cátedra de Física de Reactores I que se ha impartido durante más de 25 años en la Universidad Autónoma Metropolitana, campus Iztapalapa (UAMI), orientada principalmente a estudiantes inscritos en el programa de estudios de Ingeniería en Energía, el cual es un programa pionero en México en el estudio de fuentes alternas de energía, i.e., energía nuclear y energías renovables. El material que se desarrolla en este texto se apoya en libros clásicos de la ingeniería nuclear, entre los que destacan: *Introduction to Nuclear Reactor Theory* e *Introduction to Nuclear Engineering* ambos del autor J.R. Lamarsh. Asimismo, se incluyen preguntas, problemas y ejercicios desarrollados por los autores de este texto para una mayor comprensión.

El texto ha sido cuidadosamente escrito para que todo estudiante con conocimiento básico sobre Ecuaciones Diferenciales Ordinarias, Ecuaciones Diferenciales Parciales Lineales, método de separación de variables, series de Fourier, integrales de Fourier, Funciones Bessel y polinomios de Legendre, no tenga ningún problema para su goce y pleno entendimiento.

El libro se concibió como material de apoyo para un curso de estudiantes no graduados, y proporciona las bases para la comprensión de conceptos claves sobre los que descansa la física de reactores nucleares tales como la interacción de la radiación con la materia, factor de multiplicación, reactividad, teoría de difusión de neutrones, entre otros; conceptos cuyo dominio es esencial por parte de todo estudiante interesado en esta área de la Ingeniería nuclear.

Es mi deber expresar un reconocimiento especial a los autores por poner a nuestro alcance este texto que sin lugar a dudas beneficiará a un gran número de estudiantes y profesores en la materia, que si bien mucho del material aquí expuesto se encuentra en los libros clásicos, la forma en que ha sido expuesto permite un pleno entendimiento de los principios básicos de la física de reactores nucleares.

Ciudad de México, Invierno de 2016.

DR. ALEJANDRO NÚÑEZ CARRERA

REVISIÓN DE CONCEPTOS DE FÍSICA NUCLEAR

1.1. Estructura nuclear

En la teoría del reactor nuclear las partículas de interés fundamental son el neutrón (n), el protón (p), y el electrón (e). Además de la radiación electromagnética gamma (γ), resultado de reacciones nucleares dentro de un reactor.

El neutrón es una partícula eléctricamente neutra con una masa en reposo de 1.008665 unidades de masa atómica ($uma = 1.661 \times 10^{-24} \text{ g}$). El neutrón es la partícula más importante en la teoría del reactor nuclear ya que, como veremos más adelante, las reacciones que hacen posible la producción de potencia nuclear y las teorías que describen la operación de un reactor nuclear están íntimamente relacionadas con los neutrones.

El protón es una partícula que porta una unidad positiva de carga eléctrica. Tiene una masa de 1.007277 uma.

El electrón lleva una unidad negativa de carga eléctrica y tiene una masa mucho menor que la del neutrón y el protón. Su masa es de 0.0005486 uma.

Los neutrones, protones y electrones se combinan para formar átomos. Los protones y los neutrones están concentrados en una región central muy pequeña dentro del átomo llamada núcleo. Los electrones ocupan el espacio exterior a este núcleo. Cualquier partícula contenida dentro del núcleo, ya sea protón o neutrón, es llamada un nucleón. Cualquier combinación particular de neutrones y protones para formar el núcleo de un átomo se le conoce como un núclido. Un átomo tiene un diámetro del orden de 10^{-8} cm y el núcleo tiene un diámetro de cerca de 10^{-12} cm.

Los electrones forman parte de un átomo y están localizados fuera del núcleo, y se les ha denominado electrones extranucleares. Ellos constituyen la estructura extranuclear del átomo. En algunas reacciones de decaimiento radiactivo los núcleos emiten un electrón; cualquier electrón que se forma de esta manera se llama una partícula beta (β). En algunos casos un núcleo radioactivo emite una partícula con la masa de un electrón pero portando una unidad positiva de carga eléctrica; tales partículas son llamadas positrones (β^+) y así se distinguen de las partículas beta que llevan una unidad de carga negativa que son designadas también como negatrones (β^-).

Los átomos son eléctricamente neutros, esto es, contienen el mismo número de protones y electrones. Las propiedades químicas de los átomos están determinadas por el número de electrones extranucleares y debe ser igual al número de protones, o número atómico. El número total de nucleones contenido en cualquier núcleo atómico se conoce como número de masa. Cada número atómico designa a un diferente material (desde el punto de vista químico), llamado un elemento. El elemento más simple, es el hidrógeno y le corresponde un número atómico igual a uno. El elemento siguiente, el helio, contiene dos electrones extranucleares y dos protones en su núcleo. En una forma similar los modelos de todos los elementos restantes pueden ser formulados. El elemento natural más pesado que existe en la naturaleza es el uranio con un número atómico de 92.

Los núcleos del mismo número atómico pero diferente número de masa se denominan isótopos del mismo elemento. El elemento hidrógeno, por ejemplo, existe en tres diferentes formas, todas conteniendo un electrón extranuclear. La primera forma consiste de un protón como núcleo y se le denomina protio. La segunda forma contiene un neutrón y un protón y es llamado deuterio. La tercera forma, el tritio, tiene dos neutrones y un protón en su núcleo. Las tres formas tienen números atómicos de uno: los números de masa son uno, dos y tres respectivamente; el protio, el deuterio y el tritio son isótopos del hidrógeno.

Además, si dos núcleos tienen el mismo número de masa son llamados isobaros y si tienen el mismo número de neutrones pero diferente número de protones son llamados isótonos.

Una notación que se utiliza frecuentemente para describir un núclido es la siguiente:

$${}_Z(\text{Símbolo químico})^A$$

donde Z es el número atómico y A es el número de masa. Así los tres isótopos del hidrógeno descritos anteriormente se denotan ${}_1H^1$, ${}_1H^2$ y ${}_1H^3$ respectivamente. Otro ejemplo, para el isótopo del uranio que tiene 143 neutrones y 92 protones en el núcleo, la representación es ${}_{92}U^{235}$.

El núcleo del átomo normal de hidrógeno participa frecuentemente en las reacciones nucleares, en particular en interacciones de dispersión. Otro núcleo que usualmente interviene en las reacciones nucleares (debido a su estabilidad), es el núcleo del átomo normal de helio, ${}_2He^4$, que consiste de dos protones y dos neutrones. Cuando este isótopo se encuentra sin sus electrones extranucleares (con una carga de más dos) se llama partícula alfa (α).

1.2. Equivalencia masa-energía

La equivalencia de la masa y la energía está dada cuantitativamente por la ecuación de Einstein:

$$E = mc^2$$

donde E es la energía, m representa a la masa (defecto de masa en el caso de reacciones nucleares) y c es la velocidad de la luz, todo en un conjunto consistente de unidades.

Puesto que una uma es 1.661×10^{-24} g y $c = 2.998 \times 10^{10}$ cm·s⁻¹, la energía equivalente a una uma es 1.493×10^{-3} erg. Dado que $1 \text{ erg} = 10^{-7}$ Joule, 1 uma es equivalente a 1.493×10^{-10} Joule. Una unidad más común en teoría del reactor nuclear es el electrón-Volt (eV), la cuál es la cantidad de energía que gana una partícula cuando pasa a través de una diferencia de potencial de 1 V. Un electrón-Volt es equivalente a 1.6022×10^{-19} Joules. Usando unidades de eV, una uma

tiene una equivalencia en energía de $(1.493 \times 10^{-10} \text{ Joule}) / (1.6022 \times 10^{-19} \text{ Joule/eV}) = 931.844 \times 10^6 \text{ eV} = 931.844 \text{ MeV} \cong 932 \text{ MeV}$.

Energía de enlace. Si las masas de los neutrones y protones que componen el núcleo de un átomo se suman, el total excederá a la masa determinada experimentalmente. Esta pérdida de masa se debe a su conversión en energía de enlace de acuerdo a

$$\Delta E = \Delta m c^2 \quad (1.1)$$

donde ΔE representa la energía de enlace y Δm es el déficit de masa. Esta misma cantidad de energía será necesaria para separar todos los nucleones.

Para evaluar el defecto de masa se suman la masa de todos los neutrones, $(A-Z)(m_n)$, con las de todos los protones, $Z(m_p)$, que componen el núcleo y se resta de la masa real del núcleo del isótopo en cuestión, $(M_x - Zm_e)$, donde M_x es la masa del isótopo (real) que se encuentra en tablas. Así

$$\Delta m = Z(m_p) + (A - Z)(m_n) - (M_x - Zm_e) \quad (1.2)$$

Si las masas del protón y electrón son combinadas, como se mencionó anteriormente, esta suma será igual a la masa real del átomo de hidrógeno más un defecto de masa que se invierte en la energía de enlace de estas partículas. Es decir, podemos escribir la aproximación:

$$\Delta m = Z(m_H) + (A - Z)(m_n) - M_x \quad (1.3)$$

Habiendo en ésta última ecuación un error debido a la energía de enlace del electrón que es de unos cuantos electrón-Volts.

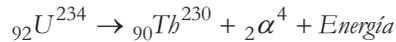
1.3. Decaimiento radioactivo

Algunos elementos pesados que existen en la naturaleza exhiben inestabilidad y emiten radiaciones, para formar configuraciones más estables. Los tres modos comunes de radiación son, el decaimiento alfa, beta y gama.

Decaimiento alfa. En este tipo de desintegración, el núcleo perderá dos unidades de carga y cuatro unidades de masa debido a la emisión de un átomo de

helio doblemente ionizado. Debido a que la partícula alfa es pesada, su rango de penetración es pequeño en la mayoría de los materiales. La ionización y la excitación son dos procesos usados para la detección de las partículas alfa.

Ejemplo:

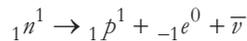


Radiación gamma. La radiación gamma es una onda electromagnética muy similar a los rayos X y difiere de estos únicamente en que se origina del núcleo. Los rayos gamma son muy penetrantes en la mayoría de los materiales, no tienen carga ni masa pero portan energía (un núcleo que emite rayos gamma no cambia su número atómico o número de masa). Los rayos gamma interactúan con la materia en tres formas: efecto Compton, efecto fotoeléctrico y producción de pares. El efecto combinado de estos tres procesos para una determinada energía de la radiación gamma está dado por el coeficiente de atenuación lineal (μ) para algún material. Puesto que al pasar por un material se reduce la intensidad de los rayos gamma, una ley exponencial es usada para su atenuación.

La intensidad original I_0 expresada en fotones/($\text{cm}^2 \cdot \text{s}$) se reducirá a $I(x)$ al atravesar una distancia x del medio de acuerdo a

$$I(x) = I_0 \exp(-\mu x) \quad (1.4)$$

Decaimiento beta. La radiación beta proviene del núcleo y se debe al decaimiento de protones y neutrones. Un neutrón libre es inestable (vida media de 12 min.) y decae en un protón y un electrón (negatrón, ${}_{-1}e^0$, o beta negativa, β^-) en la siguiente forma

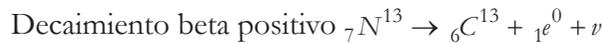


donde $\bar{\nu}$ es un antineutrino que fue postulado para satisfacer las leyes de conservación. Similarmente un protón decaerá en una partícula con la masa del electrón pero cargado positivamente (positrón, ${}_{+1}e^0$, o beta positiva, β^+) más un neutrón y un neutrino.

Por lo tanto, las partículas beta pueden tener una carga positiva o negativa y masa despreciable, tienen una distribución de energía inicial continua hasta un valor máximo E_{max} , pueden interactuar con la materia en colisiones que provocan

ionización y excitación, en un proceso denominado Brehmsstrahlung (frenado repentino), o finalmente participando como positrones en la colisión con un electrón para producir dos fotones que se mueven en direcciones opuestas. Para las partículas beta la energía más probable, E_p , es igual a un tercio de la energía máxima E_{max} . La atenuación puede ser definida por un coeficiente de absorción lineal μ , similar al de los rayos gamma.

Ejemplo:



1.4. Probabilidades y tasa de decaimiento radioactivo

El hecho de que un núcleo inestable pueda o no decaer dentro de algún intervalo de tiempo trae como consecuencia que este proceso sea descrito estadísticamente.

El carácter del decaimiento radiactivo es tal que es razonable postular que la probabilidad de que cualquier núcleo experimente decaimiento, dentro de un intervalo de tiempo, es independiente de la historia del núcleo o sus vecinos y es proporcional al intervalo de tiempo. Si la constante de proporcionalidad es λ y el intervalo de tiempo es Δt entonces la probabilidad de una reacción dentro del tiempo Δt es $\lambda \Delta t$. Entonces, la probabilidad de que una reacción no ocurra dentro del mismo intervalo de tiempo está dada por la siguiente expresión:

$$p = 1 - \lambda \Delta t \quad (1.5)$$

La probabilidad de que un núcleo inestable sobreviva dos intervalos de tiempo Δt es el producto de las probabilidades de que sobreviva a través de cada intervalo, es decir, para 2 eventos independientes:

$$p \times p = (1 - \lambda \Delta t)(1 - \lambda \Delta t) = (1 - \lambda \Delta t)^2 \quad (1.6)$$

Ahora, para n eventos independientes, la probabilidad de que este núcleo sobreviva n intervalos de tiempo sin sufrir un decaimiento radiactivo es entonces

$$p^n = (1 - \lambda \Delta t)^n \quad (1.7)$$

Si el tiempo total que resulta de la suma de n intervalos de tiempo Δt es igual a t , la probabilidad de que un núcleo inestable sobreviva el tiempo t es:

$$p^n = \left(1 - \lambda \frac{t}{n}\right)^n \quad (1.8)$$

en donde se ha sustituido $\Delta t = t/n$.

Dada la relación inversa que existe entre Δt y n , y si los intervalos de tiempo Δt son tomados de tamaño infinitesimal, el número de intervalos n requeridos para completar el tiempo total t se hace infinitamente grande y la probabilidad anterior será igual a:

$$P = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \lambda \frac{t}{n}\right)^n \quad (1.9)$$

Pero para cualquier número complejo, $z = x + iy$:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n = e^z$$

En nuestro caso, para un número complejo que consiste de una parte real, $x = -\lambda t$, y una parte imaginaria igual a cero, i.e., $z = x + i0 = -\lambda t$, el anterior límite se puede reescribir como:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{(-\lambda t)}{n}\right)^n = e^{-\lambda t}$$

Por lo tanto, la probabilidad de que cualquier núcleo inestable no decaiga durante un tiempo t es:

$$P = e^{-\lambda t} \quad (1.10)$$

donde λ es denominada la constante de decaimiento del isótopo en cuestión.

Si una concentración inicial, N_0 , de núcleos de un radioisótopo particular es considerada, el número de estos átomos por unidad de volumen, N , que permanecerán después de un tiempo t está dada por:

$$N = N_0 P = N_0 e^{-\lambda t} \quad (1.11)$$

La ecuación anterior indica que la concentración de un isótopo radiactivo decrecerá exponencialmente con el tiempo. Este comportamiento ha sido observado experimentalmente y es la evidencia que justifica las hipótesis para la deducción de la ecuación (1.11). Esta ecuación es conocida como la ley de decaimiento radiactivo. La constante de decaimiento, λ , puede determinarse experimentalmente para cualquier isótopo haciendo conteos como función del tiempo y ajustando los datos a la ley de decaimiento radiactivo normalizada:

$$\ln\left(\frac{N}{N_0}\right) = -\lambda t$$

Otro parámetro que es usado con frecuencia es la vida media de un radioisótopo, $T_{1/2}$. La vida media es el tiempo requerido para que una concentración inicial de material radioactivo se reduzca a la mitad.

De la ecuación (1.11)

$$\frac{N}{N_0} = \frac{1}{2} = e^{-\lambda T_{1/2}} \quad (1.12)$$

de donde

$$\lambda = \frac{\ln 2}{T_{1/2}} = \frac{0.693}{T_{1/2}} \quad (1.13)$$

Así conociendo la vida media para un isótopo radiactivo, se puede calcular su constante de decaimiento.

La tasa o rapidez a la que ocurre el decaimiento radiactivo puede determinarse de la ecuación (1.11). Si N es el número de núcleos por unidad de volumen de un núclido radioactivo entonces la rapidez de cambio de N en el tiempo es inherentemente negativa y es llamada la actividad específica, A .

De la ecuación (1.11)

$$A = -\frac{dN}{dt} = -\frac{d}{dt}(N_0 e^{-\lambda t}) = \lambda N_0 e^{-\lambda t} = \lambda N \quad (1.14)$$

Así la rapidez de decaimiento es el producto de la constante de decaimiento y la concentración de núcleos radiactivos al tiempo t .

Promedios. Cualquier promedio con respecto a una variable continua η puede escribirse como

$$\bar{f} = \int f(\eta) g(\eta) d\eta \quad (1.15)$$

donde $f(\eta)$ es la función para la que se desea su promedio. La integración se lleva a cabo sobre un rango de interés para η y puede ser una función de distribución de probabilidades normalizada, es decir:

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(\eta) d\eta = 1 \quad (1.16)$$

Para una función de distribución $g(\eta)$ que no satisface el requisito de normalización, i.e., para la cual el promedio puede obtenerse de:

$$\bar{f} = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} f(\eta) g(\eta) d\eta}{\int_{-\infty}^{\infty} g(\eta) d\eta} \quad (1.17)$$

Como un ejemplo considere el problema de estimar el tiempo de vida promedio de un núcleo radioactivo.

Para poder encontrar nuestro valor promedio es necesario construir la función de distribución de probabilidades aplicable a este caso. Esto lo haremos recurriendo otra vez a la suposición de independencia de eventos.

Al inicio de esta sección se dieron argumentos para encontrar la probabilidad de que un núcleo decaiga en un intervalo de tiempo finito Δt . Esta probabilidad es igual a:

$$P_{\text{decaimiento}} = \lambda \Delta t$$

Esto quiere decir que para un intervalo de tiempo diferencial podemos escribir:

$$P_{\text{decaimiento}} = \lambda dt$$

Ahora, si $g(t)$ es así una función de distribución de probabilidades en el tiempo, la cual es igual a la probabilidad de que un núcleo sobreviva (no haya un decaimiento) hasta el tiempo t , dada por $e^{-\lambda t}$, multiplicada por la probabilidad (constante) por unidad de tiempo de sufrir una reacción, la cuál es λ . Entonces $g(t)$ puede ser expresada como

$$g(t) = e^{-\lambda t} \lambda \quad (1.18)$$

Sustituyendo la ecuación (1.18) en la (1.15), el tiempo de vida promedio de un núclido radioactivo, después de integrar por partes, es igual a

$$\bar{t} = \int_0^{\infty} t g(t) dt = \int_0^{\infty} t e^{-\lambda t} \lambda dt = \lambda \int_0^{\infty} t e^{-\lambda t} dt = \frac{1}{\lambda} \quad (1.19)$$

donde la última integral se puede verificar fácilmente que es igual al inverso de λ^2 .

Por lo tanto el tiempo de vida promedio es justamente el inverso de la constante de decaimiento.

También el tiempo de vida promedio de un átomo inestable o radionúclido también se puede calcular con

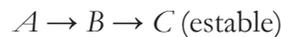
$$\bar{t} = \frac{\int_0^{\infty} t e^{-\lambda t} dt}{\int_0^{\infty} e^{-\lambda t} dt} = \frac{1}{\lambda} \quad (1.20)$$

en donde se aplicó la función de distribución dada por $e^{-\lambda t}$, la cual no está normalizada en el dominio del tiempo.

1.5. Decaimiento compuesto

Frecuentemente un núcleo radioactivo puede decaer en otro elemento, llamado hijo del núcleo padre, el cual también es inestable.

El hijo puede decaer en un núcleo estable o inestable. Un esquema de decaimiento puede representarse como



Las ecuaciones diferenciales que gobiernan las composiciones de A , B y C pueden escribirse como

$$\frac{dN_A}{dt} = -\lambda_A N_A; \text{ puesto que no hay producción} \quad (1.21)$$

$$\frac{dN_B}{dt} = -\lambda_B N_B + \lambda_A N_A \quad (1.22)$$

donde $\lambda_B N_B$ indica la rapidez de decaimiento y $\lambda_A N_A$ indica la rapidez de producción de B , la cual es igual al decaimiento de A .

$$\frac{dN_C}{dt} = \lambda_B N_B; \text{ puesto que no hay decaimiento en este esquema} \quad (1.23)$$

Las solución de este sistema de ecuaciones es igual a

$$N_A(t) = N_A(0) \exp(-\lambda_A t) \quad (1.24)$$

$$N_B(t) = \left\{ \frac{\lambda_A N_A(0)}{(\lambda_B - \lambda_A)} \right\} \{ \exp(-\lambda_A t) - \exp(-\lambda_B t) \} \quad (1.25)$$

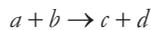
$$N_C(t) = N_A(0) \left\{ \frac{[\lambda_B \exp(-\lambda_A t) - \lambda_A \exp(-\lambda_B t)]}{[\lambda_A - \lambda_B]} + 1 \right\} \quad (1.26)$$

en donde se han supuesto las siguientes condiciones iniciales:

$$t = 0, \quad N_A = N_A(0); \quad N_B = 0; \quad N_C = 0$$

1.6. Reacciones nucleares

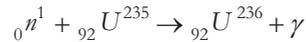
El estudio de las reacciones nucleares se puede formular en una forma muy similar a la usada para describir las reacciones químicas. Desde luego, la notación familiar para una reacción química



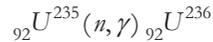
es usualmente adoptada para representar las reacciones nucleares. Sin embargo en las reacciones nucleares, una partícula es comúnmente considerada como un proyectil mientras que la otra se toma como un blanco y algunas veces se usa la notación más detallada.



Por ejemplo la reacción



Sería escrita como



En general este tipo de reacciones se denotan simplemente como (n, γ) .

Las reacciones nucleares son por lo general acompañadas ya sea por la absorción o por la emisión de energía. Se puede calcular la energía desprendida (o requerida) para una reacción nuclear usando la expresión de Einstein, $E = mc^2$.

En las reacciones nucleares m será la diferencia de masas entre las partículas que interaccionan antes y después de la colisión.

Para la reacción $a(b,c)d$ se calcula la energía en la reacción como

$$Q = [(M_a + M_b) - (M_c + M_d)]c^2 \quad (1.27)$$

Si $Q > 0$, entonces se dice que la reacción es exotérmica, lo que corresponde a un desprendimiento de energía en la reacción. Si $Q < 0$, entonces la reacción se dice que es endotérmica y se debe suministrar energía para que ocurra la reacción entre los núcleos que chocan. Obviamente, la fisión nuclear es un ejemplo de una reacción exotérmica.

PROBLEMAS Y PREGUNTAS PARA EL CAPÍTULO 1

En las siguientes preguntas, $z = \#$ protones, $a = \#$ de masa.

- 1 Una definición de isótopo de un elemento sería:
 - a) $z = \text{constante}$, $a = \text{variable}$.
 - b) $z = \text{variable}$, $a = \text{constante}$.
 - c) $a - z = \text{constante}$, $z = \text{variable}$.
 - d) $a - z = 0$.

- 2 Tiempo de vida promedio de un átomo radiactivo:
 - a) $\ln 2 / \lambda$
 - b) $1 / \lambda$
 - c) ∞
 - d) 0 segundos.

- 3 Si $r(t)$ es la tasa de producción de un radioisótopo, en átomos/s, dentro de un reactor, y la tasa de desintegración o pérdida está dada por $\lambda n(t)$. ¿Cuál sería el número de átomos en equilibrio?

- 4 En la cadena radioactiva: $a \rightarrow b \rightarrow c$ (estable). ¿Cuál es la ecuación de variación (balance) correcta, del número de átomos del isótopo b en el tiempo?
 - a) $d n_b / dt = -\lambda_c n_c + \lambda_b n_b$
 - b) $d n_b / dt = -\lambda_b n_b + \lambda_a n_a$
 - c) $d n_b / dt = \lambda_b n_b - \lambda_a n_a$
 - d) $d n_b / dt = \lambda_b n_b$

- 5 En un reactor se produce un radioisótopo con una tasa de formación $r(t)$. en el reactor el radioisótopo puede perderse por un mecanismo de absorción de neutrones con una tasa de pérdida igual a $cn(t)$. Donde c es una constante y $n(t)$ es la densidad atómica. Asimismo, el radioisótopo se puede perder por decaimiento natural.
 - a) Plantee la ecuación diferencial para el balance de átomos de «a».
 - b) Resuelva la ecuación diferencial y encuentre una expresión para la densidad atómica como función del tiempo, si al tiempo $t = 0$, $n = n(0)$.

INTERACCIÓN DE NEUTRONES CON LA MATERIA

2.1. Reacciones con neutrones

Cuando un neutrón se acerca a las proximidades de un núcleo varias cosas pueden suceder.

Su trayectoria puede desviarse de tal forma que el núcleo no cambia su número atómico ni su masa atómica. A este evento se le denomina reacción de dispersión. El neutrón también puede entrar al núcleo y hay una probabilidad de que antes de que otra cosa suceda, escape del núcleo. Este tipo de reacción también es llamada reacción de dispersión. Ya que el núcleo no cambia su composición. Únicamente las velocidades del núcleo y del neutrón son alteradas.

Dentro del campo de la física clásica y dado que solo consideraremos neutrones no relativistas, convencionalmente la dispersión de neutrones se divide en elástica o inelástica. En la dispersión elástica el neutrón y el núcleo se considera que son cuerpos elásticos que sufren un proceso en el cual sus energías cinéticas deben conservarse. Esto es, la energía cinética total antes de la colisión debe ser

igual a la energía cinética total después de la colisión. En el evento de dispersión inelástica el núcleo es llevado a un estado de excitación y regresa a su estado base emitiendo un rayo γ . En este último caso no se conserva la energía cinética. Aunque sí se conserva la energía total.

Otro evento o interacción es aquel en que el neutrón puede ser absorbido por el núcleo. Cuando esto ocurre, la reacción es llamada una reacción de absorción de neutrones.

Distintas cosas pueden suceder como resultado de la absorción de neutrones. La radiación γ puede ser el único resultado inmediato. Así la reacción es (n, γ) . El nuevo núcleo puede resultar inestable y experimentar un decaimiento. O también el núcleo puede resultar estable y no suceder nada. De cualquier forma, la reacción (n, γ) es llamada una absorción radiativa o captura radiativa. La absorción de neutrones puede resultar en otras reacciones; (n, p) , (n, d) , etc. Una reacción muy importante es la reacción de fisión que se simboliza como (n, f) . En la reacción de fisión el neutrón es absorbido y el núcleo receptor se divide.

Cualquier reacción de absorción diferente a la reacción de fisión es llamada una captura.

Proceso de fisión. Para que un núcleo se divida, es necesario que la energía que corresponda al estado base del núcleo, E_G , se eleve por encima de la «barrera» causada por la energía potencial de Coulomb, E_C , entre los dos fragmentos o núcleos que se producen en este proceso. Esto se logra adicionándole un neutrón al núcleo. La energía mínima que se necesita para provocar la fisión se le denomina la energía crítica, $E_{Crítica}$. Las relaciones entre estas energías se muestran en la figura 2.1.

Esta figura se entiende fácilmente si consideramos los eventos de la fisión en sentido inverso. Cuando los dos fragmentos de fisión, con cargas Z_1 y Z_2 están separados, la energía electrostática resultante de su repulsión E_C es pequeña puesto que es inversamente proporcional a la distancia entre las cargas.

$$E_C = \frac{Z_1 Z_2 e^2}{r} = \frac{Z^2 e^2}{r} \quad (2.1)$$

Esta situación es indicada en la posición A en la figura, donde la energía corresponde a la energía de la masa en reposo de los dos núcleos. Cuando juntamos

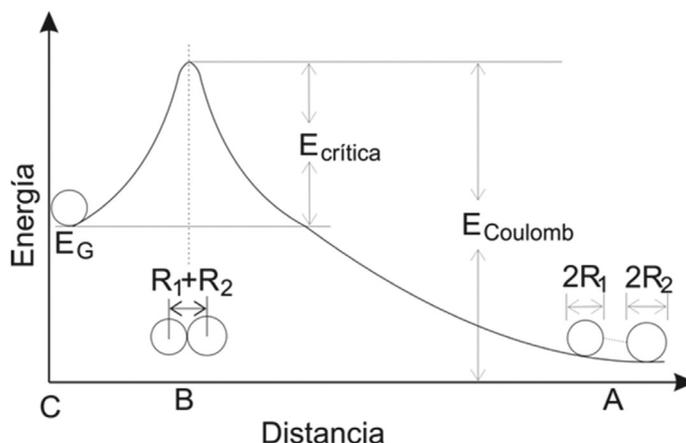


Figura 2.1. Explicación gráfica del proceso de fisión.

los dos núcleos hasta que se toquen (punto B), entonces la energía de Coulomb es máxima en $r = R_1 + R_2$. El punto C corresponde al estado donde el núcleo ocupa la configuración del estado base.

Hablando en sentido figurado, el núcleo se levanta desde el pozo del potencial hasta la cima de la loma, desde donde rueda hacia abajo y se divide en dos fragmentos. La energía requerida para hacer este trabajo es $E_{Crítica}$:

$$E_{Crítica} = E_C - E_G \quad (2.2)$$

La energía E_G es simplemente

$$E_G = C^2 \{M(A, Z) - M(A_1, Z_1) - M(A_2, Z_2)\} \quad (2.3)$$

donde (A_2, Z_2) representan al núcleo dividido en dos productos (A_1, Z_1) y (A_2, Z_2) .

La energía crítica, $E_{Crítica}$, necesaria para la fisión se consigue de la energía de excitación del núcleo compuesto que se forma al absorber el núcleo original un neutrón.

La energía de excitación consiste de la energía cinética del neutrón y del núcleo respecto al centro de masa (al formarse el núcleo compuesto la energía cinética se transforma en energía interna), más la energía de enlace del neutrón (proyectil) en el sistema compuesto.

Cuando en un átomo de U^{235} incide un neutrón, se forma un núcleo compuesto de U^{236} . La energía de enlace de éste último neutrón en el sistema compuesto es de 6.4 MeV, mientras que la $E_{Crítica}$ para fisiónar este sistema es de 5.3 MeV, por lo que la fisión puede ocurrir con neutrones de energía cinética prácticamente igual a cero (neutrones lentos o «térmicos»).

Entre los isótopos que existen en la naturaleza únicamente el U^{235} se fisiona por la absorción de neutrones térmicos. Sin embargo, el isótopo más abundante del uranio es el U^{238} , el cual requiere que un neutrón tenga una energía cinética de 1 MeV o más, para que la fisión con neutrones rápidos ocurra. Del mismo modo, los neutrones rápidos pueden causar la fisión de Tb^{232} . Estos dos últimos isótopos son materiales fértiles y pueden convertirse en núcleos físis (térmicamente fisionables) al absorber neutrones.

En el proceso de fisión además de núcleos pesados se producen neutrones.

Los neutrones emitidos por fisión varían desde 0 a 7 u 8. El número promedio de neutrones emitidos por fisión, ν , depende de la energía (como veremos en el capítulo 5), siendo esta dependencia de forma lineal.

La figura 2.2 muestra como un neutrón al ser absorbido por un núcleo de U^{235} forma un núcleo compuesto de U^{236} altamente excitado. El cual se divide en dos fragmentos, digamos Cs^{140} y Rb^{93} , más tres neutrones.

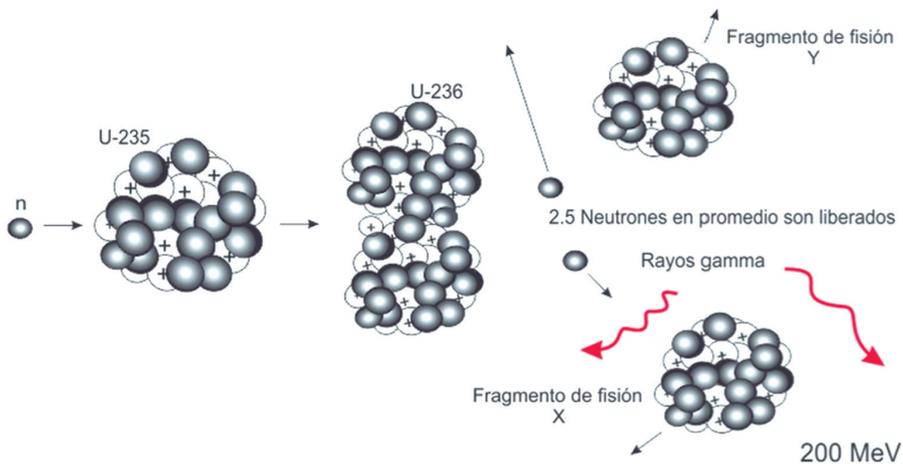


Figura 2.2. Fisión de un núcleo de U^{235} al absorber un neutrón.

La figura 2.3 muestra la variación del número de masa de los productos de fisión del U^{235} .

Es importante conocer que productos se obtienen en el proceso de fisión, ya que mientras el reactor está en operación, la concentración de los productos de fisión aumenta hasta que contribuyen apreciablemente en la captura de neutrones, consumiendo neutrones que servirían para otras fisiones. Para predecir y compensar esto es necesario conocer que isótopos son producidos como resultado de las fisiones.

Volviendo a la figura 2.3, note que un gran número de combinaciones posibles existe. La fisión de un núcleo normalmente no produce dos partículas del mismo tamaño, sino que hay más probabilidad de producir un núclido de número de masa atómica en el rango 80-110 y otro en el rango 125-155.

Casi todos estos productos son radioactivos y forman cadenas de decaimiento con emisión β^- . Como se mencionó anteriormente, algunos de estos productos tienen altas probabilidades de capturar neutrones, por lo que se consideran como «venenos» en el reactor nuclear.

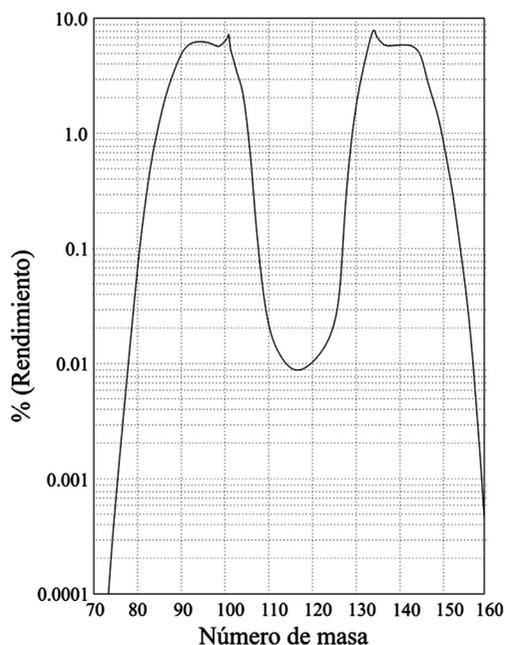


Figura 2.3. Distribución de la masa de los productos de fisión en la reacción nuclear del U^{235} con neutrones térmicos.

Los neutrones que «nacen» en la reacción de fisión tienen altas energías debido a la tremenda energía liberada en la reacción. Estos neutrones sufren reacciones de dispersión en las que pierden energía hasta que eventualmente se escapan del sistema o son absorbidos por él.

La distribución de energía de los neutrones de fisión (o neutrones rápidos) del U^{235} puede expresarse por la ecuación de Watt:

$$N(E) = 0.453e^{-E} \text{Sen}b\sqrt{2E} \quad (2.4)$$

Donde $N(E)$ es la fracción de neutrones de energía E (MeV) por unidad de intervalo de energía. Esta relación indica que para el uranio 235 la energía más probable de los neutrones de fisión es de 0.72 MeV aproximadamente y la energía promedio es de 2.0 MeV aproximadamente. En la figura 2.4 se presenta el espectro de energía de los neutrones de fisión del uranio 235.

La energía desprendida en la reacción de fisión aparece en varias formas. Para llevar a cabo la extracción de esta energía es necesario determinar cómo y donde aparece. La tabla 2.1 presenta la energía que se libera al fisionar el uranio 235. La totalidad de la energía aparece como energía cinética de los productos de fisión. Debido a que son partículas grandes casi no se desplazan y su energía cinética aparece como calor desprendido por los materiales combustibles. Los neutrones

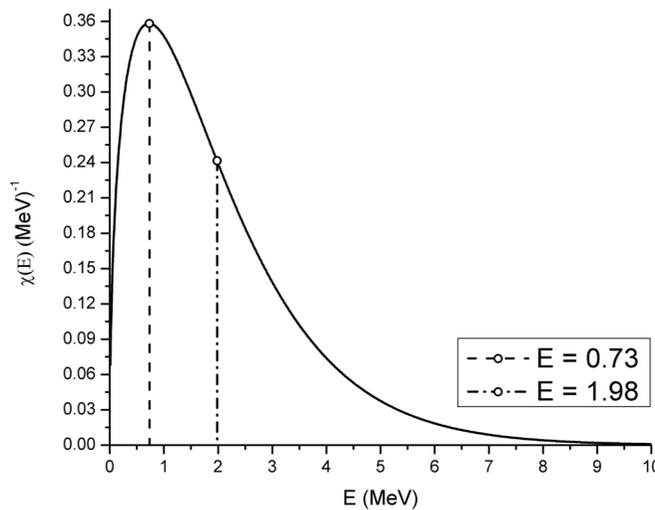


Figura 2.4. Distribución de la energía de los neutrones inmediatos para la fisión del U^{235} .

	Energía (MeV)
Energía cinética de los fragmentos de fisión	168
Rayos inmediatos	7
Energía cinética de los neutrones de fisión inmediatos	5
Decaimiento de los productos de fisión	
γ	6
β	7
Neutrinos (no generan calor)	11
Total	204

Tabla 2.1. Cantidad típica de energía liberada en la fisión.

como se verá en capítulos posteriores, se difunden fuera del material combustible y por lo general transfieren gran parte de su energía al material que rodea al combustible. La radiación γ es bastante penetrante y deposita su energía en el blindaje construido para detenerla.

2.2. Probabilidades de reacción

Es necesario describir la probabilidad y la razón (rapidez) de reacción con partículas. En la teoría del reactor nuclear son de interés las reacciones de absorción y de dispersión de neutrones. Aunque, la siguiente exposición se pueda aplicar a cualquier tipo de reacción en que intervengan partículas.

Considere una partícula, tal como un neutrón, atravesando un material. Si no interactúa atravesará el material en línea recta y con velocidad constante. Si el neutrón se mueve sobre una pequeña distancia ΔX la probabilidad de reacción se puede tomar proporcionalidad es Σ , la probabilidad de reacción es $\Sigma\Delta X$. Entonces la probabilidad de que una reacción no se lleve a cabo es

$$p = 1 - \Sigma\Delta X \quad (2.5)$$

La probabilidad de que ninguna reacción se efectuará mientras la partícula viaja a través de n intervalos ΔX es.

$$p^n = (1 - \Sigma\Delta X)^n \quad (2.6)$$

Si la distancia total recorrida en n intervalos ΔX es X , la probabilidad (2.6) se escribe como

$$p^n = \left(1 - \frac{\Sigma X}{n}\right)^n \quad (2.7)$$

Si el intervalo ΔX se toma de tamaño infinitesimal, el número de intervalos n se hace muy grande y la probabilidad de que la reacción no ocurra se convierte en

$$P = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{\Sigma X}{n}\right)^n \quad (2.8)$$

recordando que

$$\lim_{X \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{X}\right)^X = e \quad \Rightarrow \quad P = e^{-\Sigma X} \quad (2.9)$$

Si N_0 partículas entran perpendicularmente al material de espesor x el número que saldrá del material sin haber sufrido una reacción es

$$N = N_0 e^{-\Sigma X} \quad (2.10)$$

donde Σ es un parámetro característico de la reacción que se esté considerando y es llamado la sección eficaz macroscópica.

2.3. Sección eficaz

La descripción de la interacción de los neutrones con los núcleos atómicos se puede hacer cuantitativamente por medio del concepto de sección eficaz. Si un material se expone a la acción de los neutrones, la razón a la cual cualquier reacción nuclear ocurre depende del número de neutrones, su velocidad y el número y la naturaleza del núcleo en el material especificado. La sección eficaz de un núcleo para alguna reacción es una medida de la probabilidad de una interacción particular neutrón-núcleo y es una propiedad del núcleo y de la energía del neutrón incidente.

La sección eficaz σ para un proceso particular, que se aplica a un solo núcleo, es llamada la sección eficaz microscópica. Puesto que el material del blanco con-

tiene N núcleos por cm^3 , la cantidad $N\sigma$ es equivalente a la sección eficaz total de los núcleos por cm^3 y es llamada la sección eficaz macroscópica del material para el proceso. Así

$$\Sigma = N\sigma \tag{2.11}$$

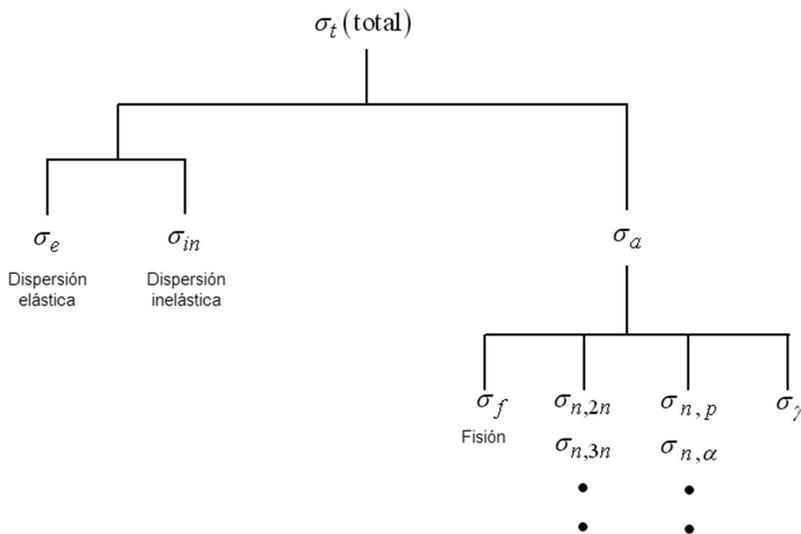
En donde la concentración de átomos puede calcularse como

$$N = \frac{\rho \eta_0}{MW} \tag{2.12}$$

donde ρ es la densidad de el material, MW es su peso molecular y η_0 es el número de Avogadro. Las unidades de Σ son comúnmente cm^{-1} o $\text{cm}^2 \text{cm}^{-3}$. Las unidades de σ son $\text{cm}^2 \text{átomo}^{-1}$ y N están dadas en átomos cm^{-3} .

Es común presentar a σ en unidades de barns donde un barn es igual a 10^{-24} m^2 . También es común usar subíndices para indicar una reacción en particular.

2.3.1. Jerarquía de las secciones eficaces neutrónica



La relación entre estas cantidades es la siguiente:

$$\sigma_S = \sigma_e + \sigma_{in}$$

$$\sigma_t = \sigma_S + \sigma_a = \sigma_e + \sigma_{in} + \sigma_f + \sigma_y + \sigma_{n,a} + \dots$$

Cualquier evento diferente a la dispersión elástica:

$$\sigma_{ne} = \sigma_t - \sigma_e$$

La ecuación (2.11) sirve para el cálculo de la sección eficaz macroscópica para cualquier reacción en un isótopo. Sin embargo, es más común el cálculo de la sección eficaz macroscópica para varias reacciones en compuestos o mezclas homogéneas. Así, si σ_a es la sección eficaz de absorción total para un isótopo y σ_t es la sección eficaz de dispersión para el mismo isótopo, la sección eficaz total σ_t , que representa la probabilidad de que ocurra cualquier reacción, ya sea de dispersión o absorción, está dada por

$$\sigma_t = \sigma_S + \sigma_a \quad (2.13)$$

Similarmente si Σ_1 , es la sección eficaz macroscópica de un núclido 1 y Σ_2 es la sección eficaz macroscópica de un núclido 2 en una mezcla homogénea compuesta de 1 y 2, la sección eficaz macroscópica de la mezcla es

$$\Sigma = \Sigma_1 + \Sigma_2 \quad (2.14)$$

Las ecuaciones (2.13) y (2.14) pueden extenderse a cualquier número o combinación de reacciones e isótopos.

Conociendo la sección eficaz macroscópica para una reacción dada se puede calcular la trayectoria libre media λ . La trayectoria libre media es la distancia promedio que una partícula recorre antes de sufrir una reacción particular. La ecuación (1.17) de distribución de probabilidad sin normalizar es la probabilidad de no tener una reacción a lo largo de una distancia x y se encontró que es $e^{-\Sigma x}$. La distancia promedio a la que ocurre una reacción es

$$\lambda_{difusión} = \bar{x} = \frac{\int_0^{\infty} x e^{-\Sigma x} dx}{\int_0^{\infty} e^{-\Sigma x} dx} \quad (2.15)$$

Así podemos ver que el inverso de la sección eficaz macroscópica es la trayectoria libre media. También hay que hacer notar que aquí también se está usando la letra

griega lambda para denotar la trayectoria libre media, y no debe confundirse con un concepto muy diferente que es la constante de decaimiento de un radionúclido. Para evitar confusiones usamos lambda con un subíndice, $\lambda_{\text{difusión}}$, para enfatizar que en este caso es un parámetro que depende de la difusión o colisiones de partículas en un medio dispersor.

2.4. Distribución de Maxwell

Cuando los neutrones rápidos reducen su velocidad por colisiones sucesivas hasta energías térmicas, tienen mucha probabilidad de ganar energía mientras la pierden en otras colisiones.

Estos neutrones termalizados se difunden a través del reactor hasta que escapan del sistema o son absorbidos. Si hay n_0 neutrones térmicos por centímetro cúbico, su densidad en función de la velocidad, $n(v)$, es el número de neutrones por centímetro cúbico por un intervalo de velocidad. La distribución de velocidades (o energía) se supone Maxwelliana y se expresa como:

$$n(v) = n_0 \frac{4\pi v^2}{(2\pi KT / m)^{3/2}} e^{-mv^2/2KT} \quad (2.16)$$

donde

n_0 = neutrones térmicos por cm^3 .

m = masa en reposo del neutrón

T = temperatura, K .

K = Constante de Boltzmann.

definiendo

$$B = \frac{4\pi}{(2\pi KT / m)^{3/2}}$$

entonces,

$$\eta(v) = \eta_0 B v^2 e^{-mv^2/2KT} \quad (2.17)$$

La velocidad más probable del neutrón, v_p , se encuentra derivando $n(v)$ con respecto a la velocidad e igualando a cero.

$$\frac{d\eta(v)}{dv} = 2\eta_0 B v e^{mv^2/2KT} + \eta_0 B v^2 \left(\frac{-mv}{KT} \right) e^{-mv^2/2KT} = 0$$

Entonces

$$v_p = \left(\frac{2KT}{m} \right)^{1/2} \quad (2.18)$$

La energía cinética de los neutrones a la velocidad más probable es

$$KE_p = \frac{mv_p^2}{2} = \frac{m2KT}{2m} = KT \quad (2.19)$$

Esta no es la energía cinética promedio, la cual tiene el valor de $3/2$ KT . Note que la energía cinética es independiente de la masa de la partícula. Para neutrones a 20° C,

$$\begin{aligned} v_p &= \left(\frac{2 \times 1.38 \times 10^{-16} \times 293}{1.66 \times 10^{-24}} \right) = 2.2 \times 10^5 \text{ cm/s} \\ &= 2200 \text{ m/s} \end{aligned}$$

A la velocidad más probable la energía cinética es

$$\begin{aligned} KE_p &= \frac{1.38 \times 10^{-16} \text{ erg}}{K} \times 243K \left(\frac{1}{1.6 \times 10^{-12}} \right)^{\text{erg/erg}} \\ &= 0.025 \text{ eV} \end{aligned}$$

Para encontrar la velocidad promedio de los neutrones

$$\bar{v} = \frac{\int_0^\infty n(v) v dv}{\int_0^\infty n(v) dv} = \frac{\int_0^\infty \frac{4\pi n_0 v^3 e^{-mv^2/2KT}}{(2\pi KT/m)^{3/2}} dv}{n_0}$$

Haciendo $y = v^2$; entonces, $dy = 2v dv$ y $v dv = dy/2$. También, definiendo $b = -m/2KT$.

Obtenemos la siguiente expresión:

$$\begin{aligned}
 \bar{v} &= \frac{4\pi}{(2\pi KT/m)^{3/2}} \int_0^{\infty} y e^{-by} \frac{dy}{2} \\
 &= \frac{2\pi}{(2\pi KT/m)^{3/2}} \left[\frac{e^{-by}}{b^2} (by - 1) \right]_0^{\infty} \\
 &= \sqrt{\frac{8KT}{\pi m}}
 \end{aligned} \tag{2.20}$$

Por lo tanto, la razón de la velocidad promedio a la velocidad más probable es

$$\frac{\bar{v}}{v_p} = \frac{\sqrt{\frac{8KT}{\pi m}}}{\sqrt{\frac{2KT}{m}}} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} = 1.128 \tag{2.21}$$

Absorbedor $1/v$. En la discusión acerca de la distribución Maxwelliana nos interesamos únicamente en la distribución de velocidades de los neutrones. Nada ha sido expuesto en relación con la variación de la sección eficaz con la velocidad (energía) de los neutrones. En la figura (2.6) las secciones de absorción de neutrones para el uranio 235 y uranio 238 se muestran en función de la energía

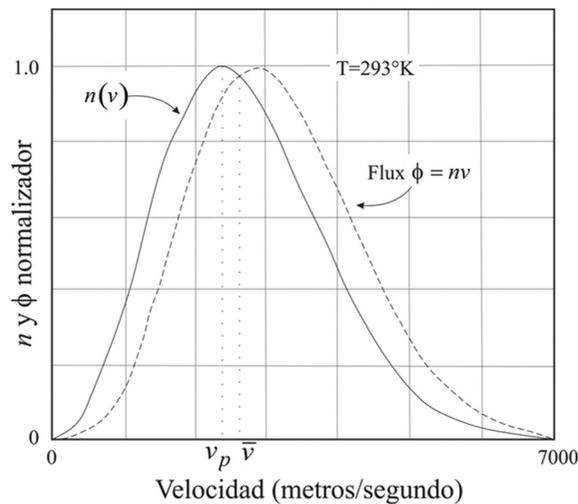


Figura 2.5. Gráfica de la distribución de Maxwell normalizada.

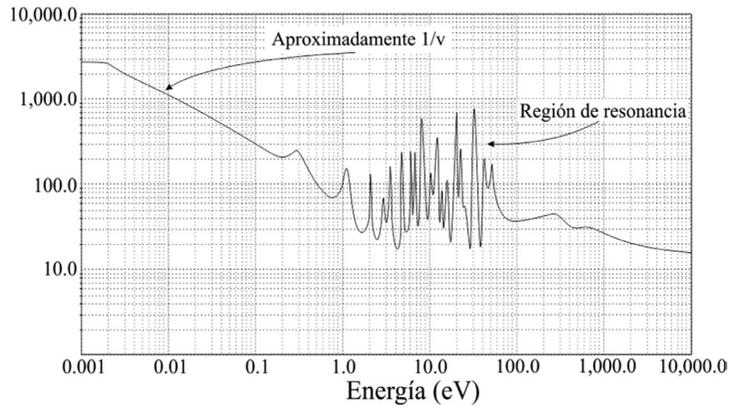


Figura 2.6. Sección eficaz del U-235.

de los neutrones. Note que para algunas regiones de la energía del neutrón, la dependencia de la sección eficaz de absorción de neutrones con la energía es relativamente simple, tal como la región designada como $1/v$ donde la sección eficaz es aproximadamente inversamente proporcional a la raíz cuadrada de la energía del neutrón. Sin embargo en otras regiones la sección eficaz se comporta en forma complicada.

Para el caso en el cual la sección eficaz de absorción sigue una dependencia, $\left(\frac{1}{v}\right)$, con la velocidad del neutrón, $\sigma(v)$ puede representarse como

$$\sigma(v) = \frac{\sigma_0 v_0}{v} \tag{2.22}$$

donde σ_0 es la sección eficaz a una velocidad de referencia v_0 . Usando la ecuación (2.22) en;

$$\overline{\sigma(v)} = \frac{\int \sigma(v) n(v) v dv}{\int n(v) v dv} \tag{2.23}$$

entonces obtenemos,

$$\overline{\sigma(v)} = \frac{\sigma_0 v_0 \int_0^\infty \left(\frac{1}{v}\right) n(v) v dv}{\int_0^\infty n(v) v dv} \tag{2.24}$$

resolviendo la integral resulta

$$\bar{\sigma} = \frac{\sigma_0 v_0}{\sqrt{\frac{8kT}{\pi m}}} \quad (2.25)$$

Si σ_0 es la sección eficaz a la velocidad más probable, $v_0 = \sqrt{2kT/m}$, la ecuación (2.25) da

$$\bar{\sigma} = \sigma_0 \sqrt{\frac{\pi}{4}} \quad (2.26)$$

En la literatura sobre teoría del reactor nuclear o sobre ingeniería del reactor nuclear se pueden encontrar tablas que dan σ_0 para una temperatura específica T_s . Si se desea una σ para otra temperatura y varía inversamente con la velocidad, i.e., inversamente con la raíz cuadrada de la energía, se encuentra con

$$\sigma_0(T) = \sigma_{0,s} \sqrt{\frac{\pi T_s}{4T}} \quad (2.27)$$

Sustituyendo la ecuación (2.27) en la (2.26), se obtiene:

$$\bar{\sigma} = \sigma_{0,s} \frac{\pi}{4} \sqrt{\frac{T_s}{T}} \quad (2.28)$$

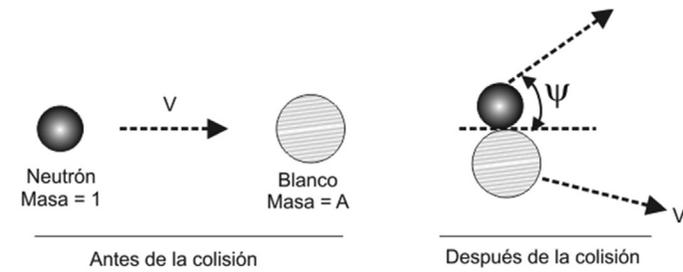
La ecuación (2.28) da la sección eficaz para cualquier temperatura cuando los neutrones tienen una distribución Maxwelliana de velocidades, esto es, cuando estas partículas están en equilibrio térmico con un material a una temperatura T y cuando la sección eficaz de absorción de neutrones tienen una dependencia $\left(\frac{1}{v}\right)$.

2.5. Pérdida de energía en colisiones elásticas

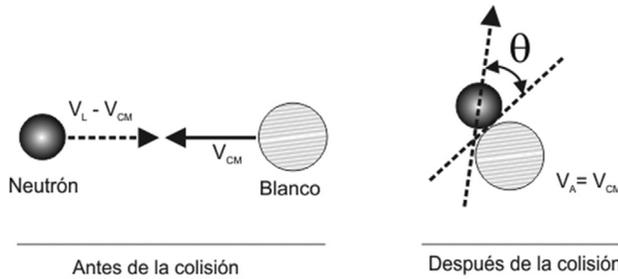
Una colisión elástica se puede visualizar como una colisión de bolas de billar.

Aplicaremos las leyes clásicas de conservación del momento y la energía.

En el sistema de coordenadas del laboratorio ésta colisión se realiza como se ilustra en la figura (2.7a).



(a) Sistemas de coordenadas en el laboratorio



(b) Sistema de coordenadas en el centro de masa

Figura 2.7. Colisión del neutrón en el sistema de coordenadas del centro de masa y del laboratorio.

Uno tiene que escribir la conservación de la energía y el momento para calcular las velocidades finales tanto del neutrón y del núcleo blanco. En vez de trabajar en el sistema de coordenadas del laboratorio es conveniente analizar este evento en el sistema de coordenadas del centro de masa. El evento en este sistema se representa en la figura (2.7b).

Puesto que el sistema coordinado en el centro de masa está siempre en reposo en este análisis, el átomo blanco se miraría como si se estuviera moviendo con una velocidad relativa V_{CM} hacia el neutrón.

Basándonos en la conservación del momento V_{CM} se calcula fácilmente como

$$1 \times (V_L - V_{CM}) - AV_{CM} = 0 \quad \text{ó} \quad V_{CM} = \frac{V_L}{(A+1)} \quad (2.29)$$

Resolviendo las ecuaciones de conservación de la energía y el momento, la velocidad del neutrón después de una colisión se escribe como

$$(V')^2 = \frac{V_L^2(1 + 2A\cos\theta + A^2)}{(A+1)} \quad (2.30)$$

En términos de la energía,

$$E' = E_0 \frac{1}{2} \{ (1 + \alpha) + (1 - \alpha)\cos\theta \} \quad (2.31)$$

donde E' es la energía después de una colisión y E_0 es la energía antes de la colisión y la cantidad α se define como

$$\alpha = \left\{ \frac{(A-1)}{(A+1)} \right\}^2 \quad (2.32)$$

Por ejemplo un neutrón en una colisión con un núcleo de hidrógeno ($A = 1$; $\alpha = 0$) tendrá una energía mínima después de un choque de frente.

Sustituyendo $\theta = \pi$ y $\cos \theta = -1$ en la ecuación (2.31), E' será igual a cero. Así un neutrón perderá toda su energía en una sola colisión con hidrógeno. Un neutrón perderá la mínima energía en una colisión de refileón ($\theta = 0$) con un núcleo pesado ($A \gg 1$; $\alpha = 1$). Si sustituimos en la ecuación (2.31) $\alpha = 1$ y $\cos \theta = 1$ obtenemos $E' = E_0$, que significa que las energías inicial y final del neutrón son iguales. Por otra parte si un neutrón tiene una colisión de frente con un núcleo ligero (diferente del hidrógeno) la energía después de la colisión está dada por la ecuación

$$E' = \alpha E_0 \quad (2.33)$$

En el sistema de coordenadas del centro de masa la dispersión es isotrópica, i.e., los neutrones se encuentran en igual número en cualquier dirección. Puesto que la dispersión es isotrópica en el sistema de coordenadas del centro de masa, la probabilidad de que un neutrón aparezca con una energía E' (correspondiendo a un ángulo de dispersión específico) en el intervalo $E' + dE'$ después de una colisión, $P(E_0 \rightarrow E')dE'$, será igual a

$$P(E_0 \rightarrow E')dE' = \frac{dE'}{(E_0 - \alpha E_0)} = \frac{dE'}{(E_0(1-\alpha))} \quad (2.34)$$

Análogamente la energía promedio de un neutrón después de una colisión se puede demostrar que es igual a,

$$\overline{E'} = \frac{E_0(1+\alpha)}{2} \quad (2.35)$$

Entonces la pérdida de energía promedio por colisión es

$$E_0 - \overline{E'} = \frac{E_0 - E_0(1+\alpha)}{2} = \frac{E_0(1-\alpha)}{2} \quad (2.36)$$

El coseno del ángulo de dispersión en el sistema de coordenadas del laboratorio, $\cos \Psi$, se relaciona con el coseno del ángulo de dispersión en el sistema de coordenadas del centro de masa por la siguiente expresión

$$\cos \Psi = \frac{(1 + A \cos \theta)}{(1 + 2A \cos \theta + A^2)} \quad (2.37)$$

El promedio de $\cos \Psi$ puede obtenerse usando el hecho de que la dispersión es isotrópica en el sistema del centro de masa. El número de neutrones dispersados en una dirección entre θ y $\theta + d\theta$ será igual a,

$$dn = n \left(\frac{2\pi \sin \theta d\theta}{4\pi} \right) \quad (2.38)$$

$$\frac{dn}{n} = -\frac{1}{2} d(\cos \theta) = -\frac{1}{2} d\mu$$

El coseno promedio del ángulo de dispersión es entonces definido por

$$\begin{aligned} \bar{\mu} &= \overline{\cos \Psi} = \int \cos \Psi \left(\frac{dn}{n} \right) \\ &= -\int_1^{-1} \frac{(1 + A \cos \theta)}{(1 + 2A \cos \theta + A^2)} \frac{1}{2} d(\cos \theta) \\ &= \frac{1}{2} \int_1^{-1} \frac{(1 + A\mu)}{(1 + 2A\mu + A^2)} d\mu = \frac{2}{3A} \end{aligned} \quad (2.39)$$

Es evidente de (2.39) que para grandes números de masa (A) el promedio del coseno del ángulo de dispersión será un número pequeño, lo que significa que el ángulo de dispersión es cercano a los 90° .

Por otra parte, en el caso del hidrógeno $A = 1$ y $\bar{\mu} = 2/3 = 0.66$, es decir, el ángulo de dispersión promedio será igual a 48° . Esta es una dispersión predominante hacia adelante. Para tomar en cuenta la variación de la energía de los neutrones con la dirección, es recomendable usar una sección eficaz de transporte Σ_{tr} en vez de la sección eficaz de dispersión Σ_s .

La sección eficaz de transporte está relacionada a la sección eficaz de dispersión por la siguiente ecuación,

$$\Sigma_{tr} = \Sigma_s (1 - \bar{\mu}) \quad (2.40)$$

$$\lambda_{tr} = \lambda_s (1 + \bar{\mu} + \bar{\mu}^2 + \dots); \quad \frac{1}{1 - \bar{\mu}} = 1 + \bar{\mu} + \bar{\mu}^2 + \dots \cos|\bar{\mu}| < 1 \quad (2.40)$$

El inverso de la sección eficaz de transporte es llamado la trayectoria libre media de transporte λ_{tr} . Más tarde se mostrará que el coeficiente de difusión de neutrones, D , está relacionado a la trayectoria libre media de transporte como

$$D = \frac{1}{3\Sigma_{tr}} = \frac{1}{3\Sigma_s (1 - \bar{\mu})} \quad (2.41)$$

2.6. Letargia

En vez de usar la escala lineal de energía es conveniente usar una escala logarítmica para cubrir en su totalidad el rango de energías de los neutrones desde la fisión (2 MeV en promedio) hasta las energías térmicas (0.025 eV). Tal escala de energía es posible si una nueva variable llamada letargia, u , es definida como,

$$u = \ln \left(\frac{E^*}{E} \right); \quad 0 < u < 19.8$$

Donde E^* es alguna energía de referencia digamos 10 MeV arriba de los cuales no existen neutrones con estas energías. Así la letargia se incrementa mientras la energía decrece.

El cambio en la letargia por colisión está dado por

$$\begin{aligned} \mu &= \ln\left(\frac{E^*}{E_{\text{después de la colisión}}}\right) - \ln\left(\frac{E^*}{E_{\text{antes de la colisión}}}\right) \\ &= \ln\left(\frac{E_{\text{antes de la colisión}}}{E_{\text{después de la colisión}}}\right) = \ln\left(\frac{E_0}{E'}\right) \\ &= \ln\left\{\frac{1}{2}(1 + \alpha) + (1 - \alpha)\cos\theta\right\}^{-1} \end{aligned}$$

Entonces

$$\Delta\mu = \text{función de } (A, \theta)$$

El cambio en la letargia por colisión es independiente de la energía inicial y es una función del número de masa y del ángulo de dispersión respecto al centro de masa.

El promedio del cambio en la letargia ξ , puede calcularse promediando sobre todo los ángulos posibles, por lo que este promedio será únicamente función del número de masa. Matemáticamente,

$$\begin{aligned} \xi &= \int \ln\left(\frac{E_0}{E'}\right) P(E_0 \rightarrow E') dE' \\ &= \int_{E_0}^{\alpha E_0} \ln\left(\frac{E_0}{E'}\right) \frac{dE'}{E_0(1 - \alpha)} \\ &= \frac{1}{(1 - \alpha)} \int_1^{\alpha} \ln(x) dx \end{aligned}$$

donde $x = E'/E_0$. En las dos últimas ecuaciones, $P(E_0 \rightarrow E') dE'$ indica la probabilidad de que un neutrón será dispersado desde E_0 entre E' y $E' + dE'$.

La última de las ecuaciones se obtuvo usando el hecho de que un neutrón tiene igual probabilidad de tener su energía entre E_0 y αE_0 después de una colisión (ver la ecuación (2.34)). Integrando ecuación para ξ se obtiene.

$$\begin{aligned}\xi &= 1 + \frac{\alpha \ln(\alpha)}{(1-\alpha)} \\ &\approx \frac{2}{\left(A + \frac{2}{3}\right)} \quad \text{para } A > 10\end{aligned}\tag{2.43}$$

donde la fórmula aproximada da menos del uno por ciento de error para números de masa que son mayores que 10. Para una mezcla de núclidos no absorbedores, el valor promedio de ξ se obtiene usando la siguiente fórmula.

$$\bar{\xi} = \frac{(\xi_1 \sigma_{s1} + \xi_2 \sigma_{s2} + \xi_3 \sigma_{s3} + \dots)}{(\sigma_{s1} + \sigma_{s2} + \sigma_{s3} + \dots)}\tag{2.44}$$

La ecuación (2.43) puede usarse para calcular el número promedio de colisiones requerido para un neutrón de fisión ($E_0 = 2 \times 10^6$ eV) hasta energías térmicas ($E = 0.025$ eV)

$$\text{Número promedio de colisiones} = \frac{1}{\xi} \ln\left(\frac{E_0}{E}\right)\tag{2.45}$$

$$\ln \frac{\left(\frac{2 \times 10^6}{0.025}\right)}{\xi} = \frac{18.2}{\xi}$$

Así para el hidrógeno (puesto que $\alpha = 0$) $\xi = 1$, únicamente 18 colisiones son requeridas para termalizar los neutrones de fisión. Para elementos pesados como el uranio 238 el número de colisiones será mayor que 200. Esta es una de las razones por las que se prefieren elementos ligeros para la moderación de los neutrones.

2.7. Razón de moderación y potencia de moderación

Estrictamente hablando uno prefiere a aquellos materiales cuyos valores de sus secciones eficaces de dispersión son altos y bajos los de sus secciones eficaces de absorción. Es así como se definen dos cantidades que son útiles en el análisis de los materiales del reactor.

Moderador	ξ	Potencia de moderación	Razón de moderación	Número de colisiones para termalizar
Agua	0.95	1.28	58	19
Agua pesada	0.51	0.18	21000	36
Grafito	0.1589	0.065	200	114
Berilio	0.2078	0.16	130	86

Tabla 2.2. Eficiencia de moderación para distintos materiales.

$$\begin{aligned}
 \text{Potencia de moderación} &= \xi \Sigma_s \\
 \text{Razón de moderación} &= \xi \frac{\Sigma_s}{\Sigma_a}
 \end{aligned}
 \tag{2.46}$$

Un buen moderador es el que tiene una alta razón de moderación. Algunos valores típicos para varios materiales moderadores están dados en la tabla 2.2.

La tabla 2.2 explica porque el agua pesada es mejor moderador que otros materiales. El tamaño de un reactor está asociado con el número de colisiones requeridas para termalizar a los neutrones. Así para una composición de combustible dada el reactor más pequeño es el de agua ligera.

Ejercicio: calcular el número de colisiones necesarias para termalizar un neutrón en los distintos materiales de un reactor.

A continuación se presenta en la tabla 2.3 el promedio de diversas cantidades de interés para la Física de Reactores Nucleares. El lector puede verificar rápidamente estos resultados aplicando la regla de promediado vista en una sección previa, así como software para cálculos científicos, tal como Mathematica.

Resumen de promedios de interés para la física de reactores

Promedios			
Cantidad	Significado	Promedio	Resultado
t	Tiempo de vida promedio de un núcleo radiativo	$\bar{t} = \frac{\int_0^{\infty} t P(t) dt}{\int_0^{\infty} e^{-\lambda t} dt}$	$\bar{t} = \frac{1}{\lambda}$
$N(E)$	Distribución de energía de los neutrones de fisión	$N(E) = 0.453e^{-E} \operatorname{sen} b \sqrt{2E}$	$E = 0.719614$
\bar{x}	Trayectoria libre media	$\lambda_{\text{difusión}} = \bar{x} = \frac{\int_0^{\infty} x e^{-\Sigma x} dx}{\int_0^{\infty} e^{-\Sigma x} dx}$	$\lambda_{\text{difusión}} = \bar{x} = \frac{1}{\Sigma}$
\bar{v}	Velocidad promedio	$\bar{v} = \frac{\int_0^{\infty} v n(v) dv}{\int_0^{\infty} n(v) dv}$	$\bar{v} = \sqrt{\frac{8 k T}{\pi m}}$
σ_a	Sección eficaz de absorción promedio en el intervalo de bajas energías	$\bar{\sigma}_a = \frac{\int_0^{\infty} \sigma(n) n(v) v dv}{\int_0^{\infty} n(v) v dv}$	$\sigma_a = \sigma_0 \sqrt{\frac{\pi}{4}}$
μ	Promedio del coseno del ángulo de dispersión	$\bar{\mu} = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \left(\frac{(1+A)}{\sqrt{1+2A+A^2}} d \right)$	$\bar{\mu} = \frac{2}{3A}$
Δu	Promedio del cambio de la letargia por colisión	$\xi = \frac{1}{(1-\alpha)} \int_{\alpha}^1 \ln\left(\frac{1}{x}\right) E_0 dx$	$\xi = 1 + \frac{\alpha}{1-\alpha} \ln \alpha$

Tabla 2.3 Promedios de interés en Física de Reactores Nucleares de Fisión.

PROBLEMAS Y PREGUNTAS PARA EL CAPÍTULO 2

1. Calcule la energía crítica necesaria para la fisión nuclear de un átomo de U-235 en un átomo de Cesio-140 y un átomo de Rubidio-93.

Nota 1: el radio de un átomo puede calcularse con $r = 1.25 \times 10^{-13} A^{1/3}$, con r en cm, donde A es el número de masa.

Nota 2: carga del electrón al cuadrado = $0.5r_e$ (MeV)(cm), donde $r_e = 2.81777 \times 10^{-13}$ cm.

Nota 3: un MeV = 1.60210×10^{-13} Joule.

Nota 4: 1 uma = 931.48 MeV.

2. La energía de excitación del núcleo compuesto, neutrón-núcleo, es igual a:

- $K_{\text{neutrón}} + K_{\text{núcleo}}$; donde K = energía cinética.
- energía interna en el sistema compuesto.
- energía enlace del último neutrón*.
- $K_{\text{neutrón}} + K_{\text{núcleo}} + \text{energía enlace del último neutrón}$
- Ninguna de las respuestas anteriores.

3. En una reacción de dispersión inelástica:

- $K_1 = K_2$, donde K_i = energía cinética antes/después de la colisión.
- $K_1 = K_2 + \gamma$.
- $K_1 = K_2 + \alpha$.
- Ninguna de las respuestas anteriores.

4. Un haz de neutrones con energía igual a 0.025 eV y sección transversal de 0.01 cm^2 golpea un blanco delgado de ${}^6\text{Li}$, induciendo la reacción exotérmica ${}^6\text{Li}(n, \alpha){}^3\text{H}$. la intensidad del haz es igual a 5×10^{10} neutrones/(cm^2s). El blanco tiene un área de 0.5 cm^2 y un espesor igual a 0.005 cm. la sección eficaz para esta reacción a 0.025 eV es 945 barns.

- ¿Cuál es la densidad de neutrones en el haz?
- ¿Cuál es la densidad atómica del blanco?
- ¿Cuál es la tasa de producción de tritio en el blanco?
- ¿Cuál es la máxima actividad del tritio que puede ser inducida por este haz?

Nota 1: la densidad del ${}^6\text{Li}$ es 0.5 g/cm^3 y la vida media del tritio es 12 años.

Nota 2: puede suponer que las pérdidas por absorción de neutrones son despreciables. Esta es buena suposición, dado que el tritio es un isótopo muy ligero y con una sección eficaz microscópica de absorción muy baja.

5. En base a la ecuación de Watt, $N(E) = 0.453 e^{-E} \text{ senh}\sqrt{2E}$, determine la energía más probable de los neutrones de fisión provenientes del U-235 (ruptura o fisión del núcleo compuesto de U-236).
6. Determine la energía promedio de los neutrones de fisión provenientes del U-235, i.e., (ruptura o fisión del núcleo compuesto de U-236).
7. Dada la función de distribución de probabilidades para que una partícula no experimente una reacción a lo largo de una distancia x de material dispersor, $e^{-\alpha x}$, encuentre la distancia promedio o trayectoria libre media que recorren las partículas antes de que ocurra una reacción.
8. Encuentre la expresión para la velocidad más probable de un neutrón térmico.

Nota: la distribución de velocidades de los neutrones térmicos es aproximada por la distribución de Maxwell, dada por:

$$n(v) = n_0 B v^2 e^{-mv^2/(2KT)}$$

donde n_0 es el número total de neutrones térmicos por cm^3 , k = constante de Boltzmann, T = temperatura absoluta, m es la masa en reposo del neutrón y b es una constante.

9. En un choque de frente, neutrón-hidrógeno, la energía cinética del neutrón después de la colisión es igual a:
 - a) $E' = 0$.
 - b) $E' = E_0$.
 - c) $E' = \alpha E_0$.
 - d) Ninguna de las anteriores respuestas.

10. El número promedio de colisiones necesarias para termalizar un neutrón rodeado de agua es:
- a) Menor que las colisiones necesarias en un medio compuesto solo de uranio.
 - b) Mayor que las colisiones necesarias en un medio compuesto solo de hidrogeno.
 - c) Menor que las colisiones en un medio compuesto únicamente por deuterio.
 - d) Todas las respuestas anteriores.
 - e) Ninguna de las respuestas anteriores.

MULTIPLICACIÓN DE NEUTRONES

3.1. Factor de multiplicación infinito

Considere inicialmente un medio homogéneo, infinito y que contiene material fisionable. Considere también que hay una concentración de neutrones, n_0 , al tiempo inicial t_0 . Estos neutrones no pueden escapar del sistema porque es infinitamente grande así que viajarán a través del medio, sufriendo reacciones de dispersión, hasta que sean absorbidos. En algunas reacciones de absorción, ocurrirán fisiones, de las que resultarán nuevos neutrones. Así, dependiendo de las probabilidades relativas de fisión en todas las reacciones de absorción y del número de nuevos neutrones producidos en promedio en cada fisión, la concentración de los neutrones en este medio infinito se incrementará, disminuirá o permanecerá constante en el tiempo.

Uno de los parámetros más importantes en el estudio de los reactores nucleares es el cociente de la concentración de neutrones entre dos generaciones sucesivas, n_{s+1}/n_s , en un medio multiplicativo infinito. Este número es llamado el factor de multiplicación infinito, K_∞ . Puesto que la absorción de n_s neutrones en la generación s resulta en n_{s+1} neutrones en la generación $s + 1$, K_∞ es el número

de neutrones producidos por neutrón absorbido en un sistema de extensión infinita.

Puesto que K_∞ es el cociente de producción al de absorción de neutrones, K_∞ menor que uno significa una disminución de la concentración de neutrones, K_∞ mayor que uno significa un aumento de la concentración de neutrones en el tiempo y K_∞ igual a uno significa una concentración de neutrones constante en el tiempo, sobre el promedio de un sistema de extensión infinita.

K_∞ puede calcularse en función del número promedio de neutrones que producen en la fisión y de la probabilidad de tener una reacción de fisión en la absorción de neutrones.

ν se definió como el número promedio de neutrones producidos por reacción de fisión. Puesto que el cociente de todas las reacciones de fisión al de todas las reacciones de absorción es Σ_f/Σ_a , entonces el número de neutrones producidos por reacción de absorción en un medio homogéneo es $\nu\Sigma_f/\Sigma_a$. Así

$$K_\infty = \nu \frac{\Sigma_f}{\Sigma_a} \quad (3.1)$$

donde Σ_f y Σ_a son las secciones eficaces macroscópicas de fisión y absorción, respectivamente. Si el medio contiene más de un isótopo fisionable una $\bar{\nu}$ promedio se puede estimar de

$$\bar{\nu} = \frac{\sum_i \nu_i \Sigma_{fi}}{\Sigma_f} \quad (3.2)$$

La ecuación (3.1) es útil solo para calcular K_∞ cuando las secciones eficaces se tienen disponibles.

Puesto que K_∞ igual a uno significa una concentración constante de neutrones en el sistema infinito, la ecuación (3.1) puede usarse para calcular la concentración de material fisionable requerida para dar una concentración en estado estacionario en un medio infinito. Esta es la mínima concentración que pueda dar una reacción en cadena continua, puesto que en un sistema finito algo de material fisionable adicional se requerirá para compensar a los neutrones que escapan de un reactor de dimensiones finitas.

3.2. Factor de multiplicación efectivo

Considere ahora un medio homogéneo, finito y aislado conteniendo material fisiónable y neutrones. La única diferencia entre este sistema y el infinito es que ahora hay una probabilidad de que el neutrón pueda escapar físicamente del sistema antes de que sea absorbido. Si P es la probabilidad de que un neutrón sea absorbido (no escape) en el sistema y n_s es la concentración de neutrones en la generación s , entonces Pn_s neutrones serán absorbidos para producir $K_\infty Pn_s$ neutrones en la generación $(s + 1)$. Así el cociente de la producción a la destrucción de neutrones en un sistema finito es $K_\infty P$. Este producto es también conocido como el factor de multiplicación efectivo, K_{eff} o simplemente K .

Si $K_\infty P$ es mayor que uno, cada generación de neutrones es más grande que la anterior y la concentración de neutrones se incrementa con el tiempo. Un reactor en esta condición es llamado super crítico. Si $K_\infty P$ es exactamente igual a uno, la concentración es independiente del tiempo y el reactor es llamado crítico o justamente crítico. Si $K_\infty P$ es menor que uno, la concentración de neutrones disminuye con el tiempo y el reactor es llamado subcrítico.

Para que el núcleo de un reactor real sea crítico ($K_{eff} = 1$), K_∞ debe ser mayor que uno para permitir,

1. Escape de neutrones.
2. Acumulación progresiva de fragmentos de fisión, algunos de los cuales tienen secciones eficaces de absorción muy grandes.
3. Consumo de núcleos fisiónables. Esto puede ser parcialmente compensado por la conversión de Th^{232} a U^{233} o U^{238} a Pu^{239} etc.
4. Cambios en la temperatura y en la presión.

La diferencia entre $K_\infty P$ y 1 es tan importante que se simboliza por δK .

$$\delta K = K_\infty P - 1 = K_{eff} - 1$$

δK es por lo tanto

$$\delta K = \frac{\text{producción de neutrones} - \text{destrucción de neutrones}}{\text{destrucción de neutrones}}$$

Otra relación muy importante relacionada a δK es llamada el exceso de reactividad o simplemente la reactividad. Que se define como

$$\rho \equiv \frac{\delta K}{K_{\infty} P}$$

Puesto que $K_{\infty} P$ es el cociente de la producción a la destrucción de neutrones, ρ será:

$$\rho = \frac{\textit{producción de neutrones} - \textit{destrucción de neutrones}}{\textit{producción de neutrones}}$$

PROBLEMAS Y PREGUNTAS PARA EL CAPÍTULO 3

1. En un reactor nuclear crítico:
 - a) $K_{\infty}=1$.
 - b) $K_{\infty}<1$.
 - c) $K_{\infty}>1$.
 - d) Ninguna de las expresiones anteriores.

2. En un reactor nuclear crítico:
 - a) $K_{eff}=1$.
 - b) $K_{eff}<1$.
 - c) $K_{eff}>1$.
 - d) Ninguna de las respuestas anteriores.

3. En un reactor nuclear crítico, la reactividad ρ , es igual a:
 - a) $\rho = 0$.
 - b) $\rho < 0$.
 - c) $\rho > 0$.
 - d) Ninguna de las respuestas anteriores.

4. Si la probabilidad de escape de los neutrones a través de las paredes del reactor, es igual a 0.2, y el factor de multiplicación infinito es igual a 2, el reactor operando bajo estas condiciones sería:
 - a) Crítica.
 - b) Subcrítico.
 - c) Supercrítico.

5. Si la probabilidad de no escape de los neutrones a través de las paredes de reactor crítico, es igual a 0.25, el factor de multiplicación infinito sería igual a:
 - a) 0.
 - b) 1.
 - c) $1 < K_{\infty} < 2$.
 - d) $K_{\infty} > 2$.

6. Si el agua de alimentación a la vasija del núcleo de un reactor, se precalienta deficientemente, por una falla en las válvulas de sangrado de las turbinas, el transitorio resultante, induciría una introducción de reactividad:
- a) Negativa.
 - b) Positiva.
 - c) Cero.

DIFUSIÓN DE NEUTRONES

Dentro de un reactor nuclear los neutrones son producidos como resultado de las reacciones de fisión a energías cinéticas altas. Las secciones eficaces de absorción son relativamente bajas a energías altas.

En consecuencia, la mayoría de estos neutrones de alta energía sufren reacciones de dispersión en las cuales pierden energía.

Eventualmente, ellos son absorbidos o se pierden del sistema. Un porcentaje de aquellos que son absorbidos resultan en reacciones de fisión en las que se producen nuevos neutrones con altas energías cinéticas. Durante estos procesos algunos de los neutrones escapan del reactor y ya no se toman en cuenta en el mantenimiento de la reacción en cadena. Esto es llamado el escape de neutrones del sistema. Cuando todos los procesos están balanceados de tal forma que los neutrones que se producen son iguales a los que se pierden, ya sea por escapes del sistema o por absorciones, el reactor se dice que es crítico. Manteniéndose por sí misma la reacción en cadena.

El resultado neto es que dentro de cualquier reactor crítico hay una distribución compleja en las energías de los neutrones, extendiéndose desde las más altas

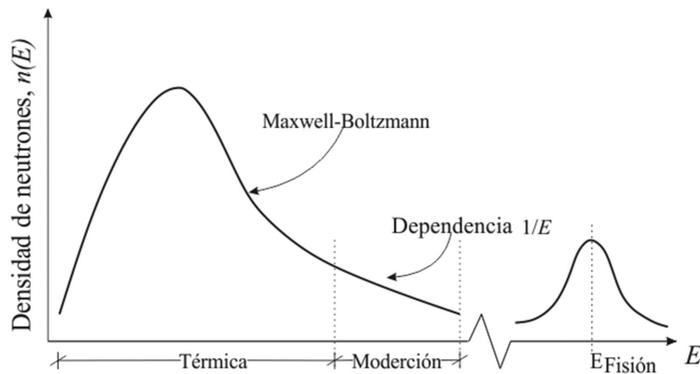


Figura 4.1. Espectro de energías en un reactor térmico.

energías a las que son producidos hasta aquellas en las que los neutrones están en equilibrio térmico con el material del reactor.

Gráficamente un espectro de energía de los neutrones en un reactor está dado por la figura 4.1.

Puesto que las probabilidades de los diversos eventos dependen en forma complicada de la energía, es muy difícil describir la rapidez a la que los eventos se llevan a cabo. Hay que usar valores promedio. Cuando los procesos dentro de un reactor son tratados en tal forma que un promedio es usado para cada tipo de evento nuclear sobre el rango total de las energías de los neutrones, el tratamiento es llamado de un grupo. Esto es, se considera que los neutrones están dentro de un rango de energía (agrupamiento) para el cual se pueden usar valores promedio de las secciones eficaces. Esta terminología se usa para distinguirla del concepto de Teoría de Multigrupos en la cual los neutrones son clasificados en distintos rangos de energía y valores promedio para cada rango de energía son usados. La discusión que haremos enseguida estará limitada a la teoría de un grupo, i.e, neutrones monoenergéticos, dejando la teoría de multigrupos para más tarde.

4.1. Flujo de neutrones

La razón o rapidez con que las reacciones nucleares se llevan a cabo es función de la densidad de neutrones, sus velocidades y de la sección eficaz para el tipo de reacción que se esté considerando. Es decir,

si n = densidad de neutrones
 V = velocidad del neutrón
 Σ = sección eficaz

Entonces la razón de reacción = $f(n, V, \Sigma)$

La probabilidad de que una partícula sufra una reacción mientras recorre una distancia Δx es

$$P = \Sigma_{\tau} \Delta X$$

Si hay N partículas atravesando esta distancia en el tiempo Δt . Entonces el número de reacciones por unidad de tiempo es:

$$\text{N}^{\circ} \text{ de reacciones por segundo} = \frac{N \Sigma_{\tau} \Delta X}{\Delta t} \quad (4.1)$$

pero ya que $\frac{\Delta X}{\Delta t} = V$ (velocidad de la partícula)

$$\text{N}^{\circ} \text{ de reacciones por segundo} = N \Sigma_{\tau} V \quad (4.2)$$

Ahora, si N es una densidad, es decir,

$$N [=] \text{ Partículas / Volumen}$$

La ecuación (4.2) nos dará

$$\text{N}^{\circ} \text{ de reacciones por segundo por centímetro cúbico} = N \Sigma_{\tau} V \quad (4.3)$$

Que también es llamada:

$$\text{Rapidez de reacción por unidad de volumen} = N \Sigma_{\tau} V$$

El producto de la velocidad de los neutrones por la densidad aparece frecuentemente en el estudio de los reactores nucleares y se le ha asignado un símbolo especial, ϕ , y es llamado el flujo de neutrones.

Así

$$\phi = NV$$

$$\phi \equiv \text{flujo de neutrones} = \frac{\text{neutrones}}{\text{cm}^3} \times \frac{\text{cm}}{\text{s}} = \frac{\text{neutrones}}{\text{cm}^2 \text{s}}$$

Por lo tanto la ecuación (4.3) que me da la rapidez, tasa o razón de reacción se convierte en

$$\text{Tasa de reacción por unidad de volumen} = \Sigma_{\tau} \phi \quad (4.4)$$

Hasta aquí se ha supuesto que los neutrones son monoenergéticos, i.e., tienen la misma velocidad. En situaciones más reales, los neutrones tienen sus velocidades distribuidas sobre un gran rango de energías y las tasas de reacción deben darse en función de un flujo y de una sección eficaz que dependa de la energía.

Por lo tanto la rapidez de reacción para neutrones de una energía E está dada por:

$$\text{Rapidez de reacción dependiente de la energía} \equiv R(E) = \phi(E) \Sigma_{\tau}(E)$$

La rapidez total de reacción puede determinarse integrando sobre todas las energías posibles

$$\text{Razón total de reacción} \equiv R = \int_0^{\infty} \phi(E) \Sigma_{\tau}(E) dE \quad (4.5)$$

Así, esta última ecuación se puede usar para calcular la rapidez de reacción para cualquier distribución de velocidades de los neutrones así como cualquier dependencia en la energía de la sección eficaz.

Es difícil trabajar sobre todo el rango de energía, así que es común utilizar valores promedio.

La sección eficaz promedio está dada por:

$$\bar{\Sigma}_{\tau} = \frac{\int_0^{\infty} \Sigma_{\tau}(E) \phi(E) dE}{\int_0^{\infty} \phi(E) dE} \quad (4.6)$$

Sustituyendo la ecuación (4.6) en la (4.5) resulta

$$R = \bar{\Sigma}_\tau \int_0^\infty \phi(E) dE \quad (4.7)$$

Puesto que el flujo total está dado por

$$\phi = \int_0^\infty \phi(E) dE \quad (4.8)$$

La ecuación (4.7) se convierte en

$$R = \phi \bar{\Sigma}_\tau \quad (4.9)$$

Pero

$$\bar{\Sigma} = N \bar{\sigma}$$

Por lo tanto

$$\phi \bar{\Sigma} = N \bar{\sigma} \phi$$

Donde

$$\bar{\sigma} = \frac{\int_0^\infty \sigma(E) \phi(E) dE}{\int_0^\infty \phi(E) dE}$$

En particular si queremos

$$\text{N}^\circ \text{ de dispersiones/cm}^3\text{s} = R_s = \phi \bar{\sigma}_s N$$

$$\text{N}^\circ \text{ de absorciones/cm}^3\text{s} = R_a = \phi \bar{\sigma}_a N$$

$$\text{N}^\circ \text{ de fisiones/cm}^3\text{s} = R_f = \phi \bar{\sigma}_f N$$

4.2. La ley de Fick

Antes de comenzar la derivación de la ley de Fick es conveniente hacer la siguiente definición.

La densidad de corriente de neutrones o corriente, es el número de neutrones por segundo que cruzan un área unitaria normal a la dirección del movimiento.

En un medio infinito y homogéneo vamos a calcular la corriente en un punto.

Para simplificar nuestra deducción calcularemos la corriente en la parte media de este sistema infinito. Coloquemos nuestro sistema de coordenadas en la mitad del sistema y calculemos la corriente producida por las dispersiones desde el semiespacio superior hacia una diferencial de superficie dA situada en el origen del sistema de coordenadas. Esta corriente parcial la vamos a denotar por J_{z^-} . Mientras que las dispersiones desde el semiespacio inferior hacia la diferencial de área se denominarán J_{z^+} . Así la corriente neta en la dirección z estará dada por

$$J_z = J_{z^+} - J_{z^-} \quad (4.10)$$

Considere un volumen unitario en el espacio donde los neutrones se dispersan y salen de este volumen en todas direcciones.

Primero concentraremos nuestra atención sobre los neutrones que viajan en la dirección $(-z)$ a través del origen.

$$\text{N}^\circ \text{ de dispersiones en } dv = \phi \Sigma_s dv \quad (4.11)$$

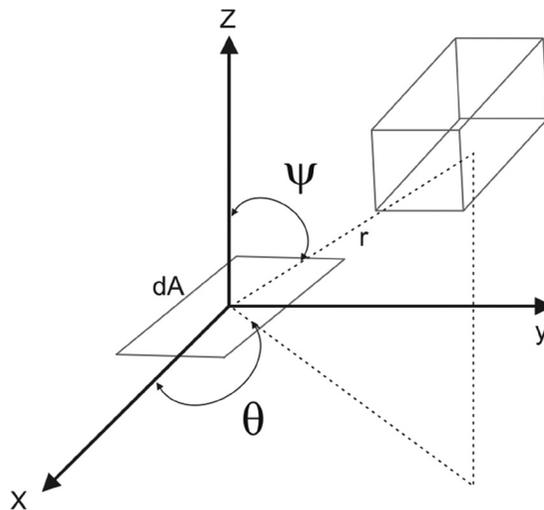


Figura 4.2. Sistema coordinado para la deducción de la ley de Fick.

Estos neutrones dispersados en dV saldrán de la diferencial de volumen en todas las direcciones (dispersión isotrópica).

Así el número cruzado dA desde una distancia r será

$$\text{N}^\circ \text{ cruzado } dA = \left(\frac{dA \cos \psi}{4\pi r^2} \right) \phi_{\Sigma_S} dv \quad (4.12)$$

donde

$$dv = r^2 \sin \psi \, dr \, d\theta \, d\psi$$

Sin embargo los neutrones en su trayecto desde dV hasta dA a lo largo de r pueden sufrir reacciones. La probabilidad de que los neutrones viajen una distancia r sin tener una reacción es

$$P = e^{-\Sigma r}$$

Así que el número de neutrones dispersados en dV que realmente llegarán al origen, suponiendo que no hay fuentes presentes, es

$$\text{N}^\circ \text{ real de neutrones cruzando } \left(\frac{dA \cos \psi}{4\pi r^2} \right) \phi_{\Sigma_S} r^2 \sin \psi \, dr \, d\theta \, d\psi \, e^{-\Sigma r} \quad (4.13)$$

Si la ecuación (4.13) se integra para todos los valores posibles de r , θ y ψ tendremos los neutrones dispersados desde toda la parte superior del medio infinito por unidad de tiempo, es decir,

$$J_{\bar{x}} dA = \int_0^\infty \int_0^{\pi/2} \int_0^{2\pi} \left(\frac{dA \cos \psi}{4\pi r^2} \right) \phi_{\Sigma_S} r^2 e^{-\Sigma r} \sin \psi \, dr \, d\theta \, d\psi$$

$$J_{\bar{x}} = \int_0^\infty \int_0^{\pi/2} \int_0^{2\pi} \left(\frac{\cos \psi}{4\pi r^2} \right) \phi_{\Sigma_S} r^2 \sin \psi \, e^{-\Sigma r} \, d\psi \, d\theta \, dr$$

Esta integral puede evaluarse con tal que la función ϕ se conozca.

Suponiendo que el flujo es una cantidad que varía lentamente, el flujo se puede aproximar por una serie de Taylor.

Expandiendo alrededor del origen,

$$\phi = \phi_o + x \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)_o + y \left(\frac{\partial \phi}{\partial y} \right)_o + z \left(\frac{\partial \phi}{\partial z} \right)_o + \dots$$

Escribiendo x, y, z en coordenadas esféricas:

$$x = r \operatorname{sen} \psi \cos \theta$$

$$y = r \operatorname{sen} \psi \operatorname{sen} \theta$$

$$z = r \cos \psi$$

Entonces,

$$\phi = \phi_o + r \operatorname{sen} \psi \cos \theta \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)_o + r \operatorname{sen} \psi \operatorname{sen} \theta \left(\frac{\partial \phi}{\partial y} \right)_o + r \cos \psi \left(\frac{\partial \phi}{\partial z} \right)_o + \dots$$

Los neutrones que atraviesan dA desde el semiespacio superior es,

$$J_{z^-} = \left(\frac{1}{4\pi} \right) \int_0^\infty dr \int_0^{\pi/2} d\psi \int_0^{2\pi} d\theta \left\{ \phi_o + r \operatorname{sen} \psi \cos \theta \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)_o + r \operatorname{sen} \psi \operatorname{sen} \theta \left(\frac{\partial \phi}{\partial y} \right)_o + r \cos \psi \left(\frac{\partial \phi}{\partial z} \right)_o \right\} \\ \times \Sigma_S \cos \psi \operatorname{sen} \psi e^{-\Sigma r} d\theta$$

Integrando con respecto a θ

$$J_{z^-} = \left(\frac{1}{2\pi} \right) \int_0^\infty dr \int_0^{\pi/2} d\psi \left[\phi_o + r \cos \psi \left(\frac{\partial \phi}{\partial z} \right)_o \right] \Sigma_S \cos \psi \operatorname{sen} \psi e^{-\Sigma r} \\ + \operatorname{sen} \theta \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^\infty dr \int_0^{\pi/2} d\psi \Sigma_S e^{-\Sigma r} \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)_o r \cos \psi \operatorname{sen}^2 \psi \\ - \cos \theta \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^\infty dr \int_0^{\pi/2} d\psi \Sigma_S e^{-\Sigma r} \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)_o r \cos \psi \operatorname{sen}^2 \psi$$

Los dos últimos términos son iguales a cero. Así.

$$2J_{z^-} = -\phi_o \int_0^\infty dr \int_1^0 d(\cos \psi) \Sigma_S \cos \psi e^{-\Sigma r}$$

$$\begin{aligned}
 & -\left(\frac{\partial\phi}{\partial z}\right)_o \int_0^\infty dr \int_1^0 d(\cos\psi) r e^{-\Sigma r} \Sigma_S \cos^2\psi \\
 2J_{z^-} & = -\phi_o \int_0^\infty \Sigma_S e^{-\Sigma r} dr \int_1^0 \cos\psi d(\cos\psi) \\
 2J_{z^-} & = \phi_o \left(\frac{1}{2}\right) \int_0^\infty \Sigma_S e^{-\Sigma r} dr + \frac{1}{3} \left(\frac{\partial\phi}{\partial z}\right)_o \int_0^\infty \Sigma_S r e^{-\Sigma r} dr
 \end{aligned}$$

Integrando directamente y por partes:

$$\begin{aligned}
 2J_{z^-} & = \frac{\Sigma_S \phi_o}{2\Sigma} + \frac{\Sigma_S}{3} \left(\frac{\partial\phi}{\partial z}\right)_o \left(\frac{1}{\Sigma^2}\right) \\
 2J_{z^-} & = \frac{\Sigma_S \phi_o}{2\Sigma} + \frac{\Sigma_S}{3\Sigma^2} \left(\frac{\partial\phi}{\partial z}\right)_o
 \end{aligned}$$

Si

$$\Sigma_S \approx \Sigma$$

$$\begin{aligned}
 J_{z^-} & = \frac{\phi_o}{4} + \frac{1}{6\Sigma_S} \left(\frac{\partial\phi}{\partial z}\right)_o \\
 J_{z^+} & = \frac{\phi_o}{4} - \frac{1}{6\Sigma_S} \left(\frac{\partial\phi}{\partial z}\right)_o \\
 J & = J_{z^+} - J_{z^-} = -\frac{1}{3\Sigma_S} \left(\frac{\partial\phi}{\partial z}\right)_o \\
 J_z & = -D \left(\frac{\partial\phi}{\partial z}\right)_o
 \end{aligned}$$

donde

$$D = \frac{1}{3\Sigma_S}$$

análogamente,

$$J_x = -D \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)_o$$

$$J_y = -D \left(\frac{\partial \phi}{\partial y} \right)_o$$

$$\therefore \vec{J} = \hat{i}J_x + \hat{j}J_y + \hat{k}J_z$$

$$= D \left[\hat{i} \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right) + \hat{j} \left(\frac{\partial \phi}{\partial y} \right) + \hat{k} \left(\frac{\partial \phi}{\partial z} \right) \right]$$

$$= -D \nabla \phi$$

$$\vec{J} = -D \nabla \phi \quad (4.14)$$

4.3. Rangos de validez de la ley de Fick

1. La ley de Fick no es válida en medios con secciones eficaces de absorción muy altas, ya que el flujo en estos medios tiene variedades bruscas (véase figura 4.4).

El hecho de truncar la serie de Taylor para el flujo de neutrones hasta los términos de segundo orden, significa que el flujo varía suavemente a lo largo del espacio.

2. La ley de Fick no es válida dentro de una a $3\lambda_s$ de una fuente de neutrones.
3. La teoría de difusión no es válida a $3\lambda_s$ de una frontera.

La explicación para (2) y (3) es la siguiente:

Consideremos la ecuación que describe la contribución de neutrones a la corriente en la dirección \hat{x} desde el semiespacio superior, denotada por $J_{\hat{x}}$.

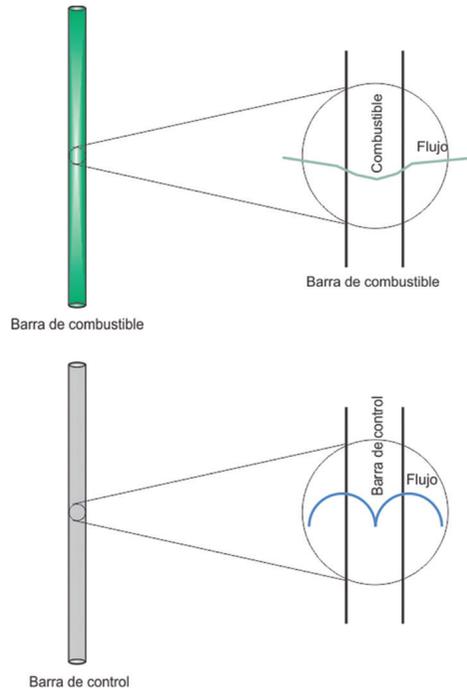


Figura 4.3. Variación del flujo de neutrones en medios absorbentes.

$$J_{z^-} = \frac{\Sigma_s}{4\pi} \int_0^\infty \int_0^{\pi/2} \int_0^{2\pi} e^{-\Sigma r} \phi \cos\psi \sin\psi \, d\theta \, d\psi \, dr \quad (4.15)$$

Debido a que la función $e^{-\Sigma r}$ decae rápidamente con la distancia r , solo las dispersiones situadas a unas pocas trayectorias libres medias de donde se esté calculando la corriente, son las que contribuyen significativamente a J . Siendo despreciable o nulo el aporte que hacen a la corriente los neutrones dispersados desde puntos alejados de donde se está haciendo el cálculo de J .

J en un punto P de un medio infinito (véase figura 4.4).

Así, el cálculo de J que es válido para un medio infinito se puede hacer en un medio finito si estamos lo suficientemente alejados de las fronteras, digamos a más de $3\lambda_s$ (véase figura 4.5).

Por otra parte, en el cálculo de la ley de Fick se supuso que no había fuentes de neutrones que contribuyeran a la corriente.

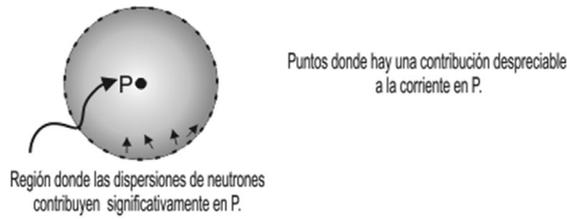


Figura 4.4. Validez de la ley de Fick.

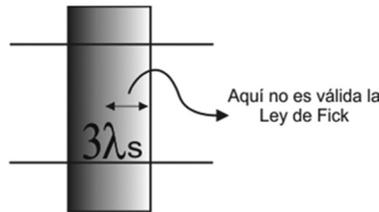


Figura 4.5. Validez de la ley de Fick.



Figura 4.6. Validez de la ley de Fick.

Es válido que existan fuentes de neutrones si están lo suficientemente alejadas de donde se está calculando J . Ya que la atenuación de neutrones desde estas fuentes hace que no contribuyen a J . Otra forma de decir esto es que la ley de Fick no es válida dentro de $3\lambda_s$ alrededor de una fuente (véase figura 4.6).

4. La anisotropía también hace que la ley de Fick no válida.

La suposición de dispersión isotrópica es buena si el medio dispersor está compuesto de elementos pesados. En elementos muy ligeros esta suposición conduce a resultados erróneos. Los más avanzados tratamientos teóricos de la teoría de transporte toman en cuenta la naturaleza anisotrópica de la dispersión. Los resultados de esta teoría son tales que la teoría de difusión puede ser aplicable si el coeficiente de difusión de neutrones se expresa como

$$D = \frac{1}{3(\Sigma - \bar{\mu}\Sigma_s)} \quad (4.16)$$

donde $\bar{\mu}$ es el promedio del coseno del ángulo de dispersión por colisión dado por:

$$\bar{\mu} = \frac{3}{2A} \text{ (no vale para átomos muy ligeros)} \quad (4.17)$$

A = Número de masa del moderador

Para el caso en el cual la sección eficaz de absorción es pequeña en comparación con la sección eficaz total

$$\Sigma_a \ll \Sigma_s$$

$$\Sigma_a \approx \Sigma_s$$

el coeficiente de difusión se puede expresar como

$$D = \frac{1}{3\Sigma_s(1 - \bar{\mu})} \quad (4.18)$$

4.4. La ecuación de continuidad

En cualquier región homogénea dentro de un reactor nuclear se pueden hacer las siguientes declaraciones:

1. Los neutrones se producen en las reacciones de fisión.
2. Los neutrones se pierden como resultado de las reacciones de absorción.
 - 3.1. Los neutrones se pierden al escapar de la región en estudio.
 - 3.2. Los neutrones pueden aparecer dentro de la región en consideración provenientes de una región adyacente.

- 3.3. La rapidez neta a la cual los neutrones se pierden por unidad de volumen debido a los procesos enunciados en (3.1) y (3.2) es llamado el escape neto de neutrones.

Como resultado de los procesos descritos en (1), (2) y (3.3) la concentración de neutrones dentro de la región puede estar cambiando con respecto al tiempo.

Comentario: La rapidez a la que los neutrones desaparecen en los reactores nucleares debido al decaimiento radiactivo es despreciable, ya que el neutrón decae en un tiempo promedio de 12 minutos. En consecuencia, este proceso de desaparición de neutrones no se incluye en el balance de neutrones que haremos enseguida.

Consideraremos un volumen arbitrario V dentro de un reactor nuclear.

La variación de la concentración de neutrones en el tiempo está dada por la diferencia entre el número de neutrones producidos por unidad de tiempo en el volumen V y el número de neutrones perdidos ya sea por absorciones o escapes.

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Variación del} \\ \text{número de} \\ \text{neutrones} \\ \text{por unidad de} \\ \text{tiempo en } V \\ \\ I \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} \text{Producción de} \\ \text{neutrones por} \\ \text{unidad de} \\ \text{tiempo en } V \\ \\ II \end{array} \right\} - \left\{ \begin{array}{l} \text{Absorción de} \\ \text{neutrones por} \\ \text{unidad de} \\ \text{tiempo en } V \\ \\ III \end{array} \right\} - \left\{ \begin{array}{l} \text{Escape neto de} \\ \text{neutrones por} \\ \text{unidad de} \\ \text{tiempo desde } V \\ \\ IV \end{array} \right\}$$

Sí $n \equiv$ Número de neutrones por unidad de volumen

Entonces, el número total de neutrones en el volumen V está dado por

$$\int_V n dv \quad (4.19)$$

Por lo tanto:

$$I = \frac{d}{dt} \int_V n dv = \int_V \frac{dn}{dt} dv \quad (4.20)$$

Ahora sea,

$s \equiv$ Número de neutrones producidos por unidad de tiempo y por unidad de volumen.

Por lo tanto:

$$II = \int_V S \, dv \quad (4.21)$$

Como anteriormente vimos, la rapidez a la que ocurren las reacciones de absorción por unidad de volumen, R_a , está dada por

$$R_a = \Sigma_a \phi \quad (4.22)$$

$R_a [=] \text{absorciones} / \text{cm}^3 \text{seg}$

Multiplicando la ecuación para R_a por la diferencia de volumen dV obtenemos el número de absorciones por unidad de tiempo (en un elemento diferencial de volumen dV):

$$R_a \, dv = \Sigma_a \phi \, dv \quad (4.23)$$

Por lo tanto, el número total de absorciones por unidad de tiempo en todo el volumen V está dado por

$$III = \int_V \Sigma_a \phi \, dv \quad (4.24)$$

En el volumen V hay posibilidad de que entren neutrones desde otras regiones y que salgan también desde V .

Sea \mathbf{J} el número neto de neutrones que escapan por segundo a través de un área diferencial dS en la superficie del volumen V . Si \hat{n} es el vector unitario normal a la superficie dS , el número de neutrones que pasan a través de dS en la dirección \hat{n} está dado por

$$\text{Escape de neutrones por segundo en dirección } \hat{n} = \vec{J} \cdot \hat{n} \, dS \quad (4.25)$$

Así, el número total de neutrones escapando a través de toda la superficie S que encierra a V es,

$$IV = \int_S \vec{J} \cdot \hat{n} dS \quad (4.26)$$

Usando el Teorema de Gauss, IV se convierte en

$$IV = \int_v \nabla \cdot \vec{J} dv \quad (4.27)$$

Por lo tanto, el balance de neutrones queda en la forma:

$$\int_v \frac{\partial n}{\partial t} dv = \int_v S dv - \int_v \Sigma_a \phi dv - \int_v \nabla \cdot \vec{J} dv \quad (4.28)$$

$$\int_v \frac{\partial n}{\partial t} dv - \int_v S dv + \int_v \Sigma_a \phi dv + \int_v \nabla \cdot \vec{J} dv = 0 \quad (4.29)$$

$$\int_v \left[\frac{\partial n}{\partial t} - S + \Sigma_a \phi + \nabla \cdot \vec{J} \right] dv = 0 \quad (4.30)$$

Ya que el volumen se escogió arbitrariamente, la ecuación de arriba solo tiene sentido si el integrando es el que se hace cero:

$$\frac{\partial n}{\partial t} - S + \Sigma_a \phi + \nabla \cdot \vec{J} = 0 \quad (4.31)$$

Rearreglando la ecuación (4.31) se obtiene la ecuación de continuidad en estado no estacionario.

$$\frac{\partial n}{\partial t} = S - \Sigma_a \phi - \nabla \cdot \vec{J} \quad (4.32)$$

Si la densidad no es función del tiempo, esto es,

$$n \neq n(t)$$

Se obtiene la ecuación de continuidad en estado estacionario:

$$\nabla \cdot \vec{J} + \Sigma_a \phi - S = 0 \quad (4.33)$$

Sustituyendo la ley de Fick en la ecuación (4.32) se obtiene

$$\frac{\partial n}{\partial t} = S - \Sigma_a \phi - \nabla \cdot (-D \nabla \phi) \quad (4.34)$$

$$\frac{\partial n}{\partial t} = S - \Sigma_a \phi + D \nabla^2 \phi$$

En teoría de difusión de un grupo la velocidad es constante, i.e.,

Si

$$\phi = nv \quad \Rightarrow n = \frac{\phi}{v}$$

Por lo tanto la ecuación (4.34) queda en la forma,

$$\frac{1}{v} \frac{\partial \phi}{\partial t} = S - \Sigma_a \phi + D \nabla^2 \phi \quad (4.35)$$

Ahora, si el flujo no depende del tiempo.

$$\phi \neq \phi(t)$$

Se obtiene la ecuación de difusión estática.

$$D \nabla^2 \phi - \Sigma_a \phi + S = 0 \quad (4.36)$$

Dividiendo la ecuación (4.36) por D

$$\nabla^2 \phi - \frac{\Sigma_a}{D} \phi + \frac{S}{D} = 0$$

Ahora, definamos los siguientes parámetros,

$$L^2 \equiv \frac{D}{\Sigma_a} \quad D [=] \text{cm} \quad \Sigma_a [=] \text{cm}^{-1}$$

Introduciendo las definiciones de arriba, la ecuación de difusión estática queda en la forma,

$$\nabla^2 \phi - \frac{1}{L^2} \phi + \frac{S}{D} = 0 \quad (4.37)$$

En donde,

$$L = \text{Longitud de difusión} \quad \left(\frac{D}{\Sigma_a} \right)^{1/2} \quad L [=] \text{cm}$$

$$L^2 = \text{Área de difusión} \quad L^2 [=] \text{cm}^2$$

4.5. Condiciones de frontera

Aunque estrictamente hablando no son condiciones de frontera, comenzaremos mencionando aquellas propiedades matemáticas que la función ϕ debe tener para representar un flujo de neutrones físicamente razonable.

Por ejemplo, ϕ debe ser una función real. Además puesto que la magnitud de la velocidad v y la densidad n no pueden ser negativas, se requiere que ϕ sea mayor o igual a cero. En la mayoría de los casos se requiere que ϕ esté acotada. Sin embargo es conveniente agregar que ocasionalmente se encuentran modelos patológicos de fuentes de neutrones que hacen que ϕ se comporte en forma divergente. Un ejemplo familiar es la fuente puntual en el origen. Otra situación es el llamado problema de Milne, en el cual se estudia el comportamiento de ϕ cerca de una frontera con el vacío, a la cual llegan neutrones desde una fuente de magnitud infinita localizada en el infinito. También se encontrarán condiciones de simetría que podemos pedir a ϕ como resultado de consideraciones geométricas, tales como simetría plana o axial. Estas condiciones se entenderán cuando veamos ejemplos específicos que se mostrarán más tarde.

Algunas condiciones de frontera simples que son comúnmente aplicadas en problemas de difusión de neutrones son:

1. El flujo de neutrones debe ser continuo en una frontera entre dos regiones homogéneas diferentes. Dada una región I adyacente a una región II en una frontera, a esta condición requiere que

$$\phi_I(a) = \phi_{II}(a)$$

2. La corriente de neutrones debe ser continua en una frontera entre dos medios homogéneos diferentes. Es decir, en la intercara entre dos medios situada en $x = a$ se debe cumplir que

$$J_I(a) = J_{II}(a)$$

3. Si un sistema es geoméricamente simétrico alrededor de un punto, una línea, o una superficie entonces la distribución del flujo de neutrones en el sistema, también debe ser simétrica alrededor del punto, línea o una superficie (esto es válido si las fuentes de neutrones están distribuidas uniformemente). Esta condición requiere que la corriente de neutrones sea igual a cero en el punto, eje o superficie de simetría del sistema que se esté considerando.
4. El flujo de neutrones es cero a una corta distancia de una frontera a través de la cual los neutrones no pueden regresar (superficie más externa del reactor). Esta condición o más propiamente una suposición, se escribe como

$$\phi(a + b) = 0$$

Donde a es la coordenada de la frontera y d es la distancia de extrapolación. Esto no significa que en realidad el flujo tienda a cero, o que sea estrictamente igual a cero en $(a + d)$. Sin embargo, la distribución del flujo dentro del reactor se podrá calcular usando esta aproximación, suposición o condición de frontera.

La distribución real del flujo en una frontera se muestra en la siguiente figura con la línea continua. La línea punteada es simplemente una extrapolación del flujo dentro del reactor.

El punto en el cual el flujo extrapolado se hace cero es $a + d$ (véase figura 4.7).

Ahora, si el flujo extrapolado puede ser representado por una línea recta, d es llamada la distancia de extrapolación lineal (véase figura 4.8).

Apliquemos la teoría de difusión para derivar la distancia de extrapolación lineal, para lo cual nos ayudaremos de la figura 4.9.

Si hubiera dispersiones en el medio en $x > a$, el número de neutrones por unidad de área cruzando $x = a$ en la dirección $-x$ puede ser expresado como:

$$J_{-x} = \frac{-\Sigma_S}{4\pi} \left[\phi_a \int_0^\infty \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} e^{-\Sigma r} \cos\psi \sin\psi \, d\psi \, d\theta \, dr + \left(\frac{\partial\phi}{\partial x} \right)_a \int_0^\infty \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} r e^{-\Sigma r} \cos^2\psi \sin\psi \, d\psi \, d\theta \, dr \right]$$

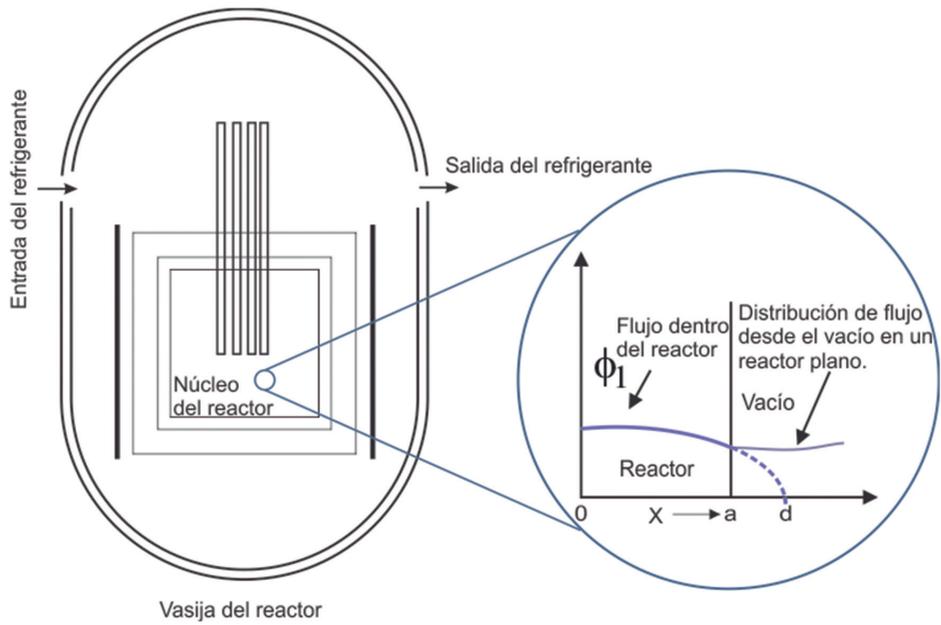


Figura 4.7. Flujo de neutrones en un reactor descubierto.

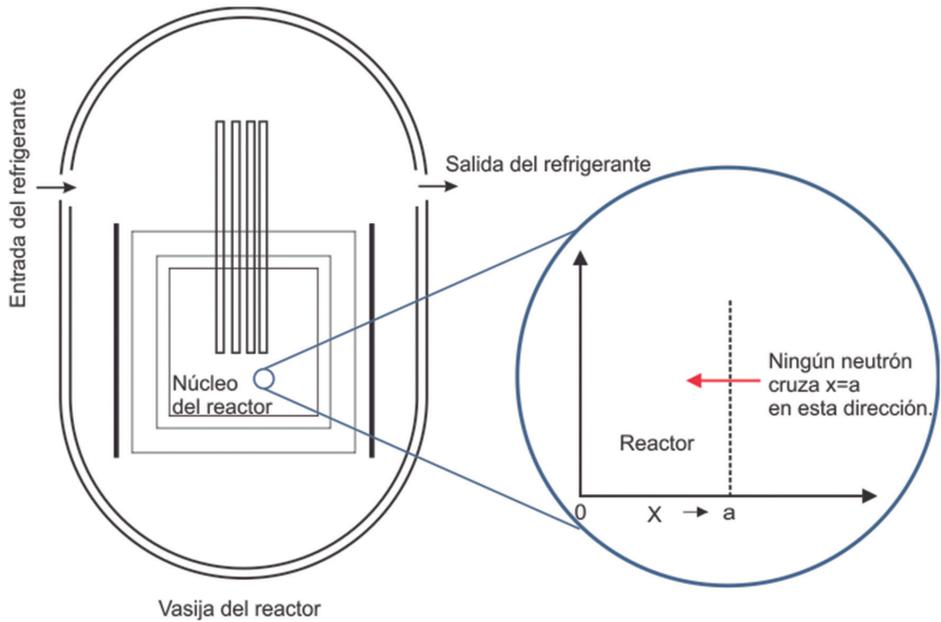


Figura 4.8. Distancia de extrapolación lineal.

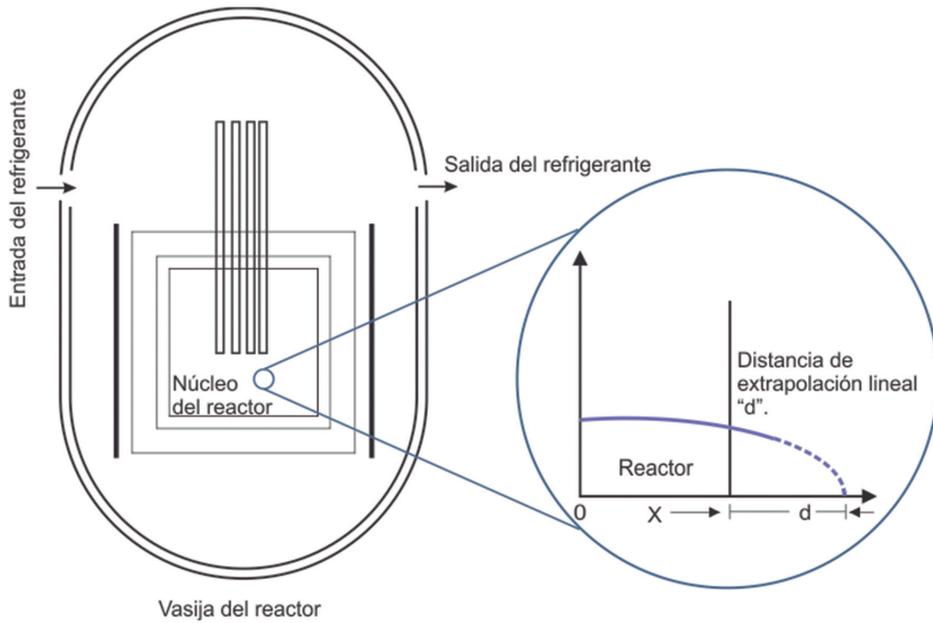


Figura 4.9. Corriente de neutrones desde el exterior de un reactor.

Donde se han despreciado los términos de 2º orden. El resultado de estas integrales da el número de neutrones dispersados en el espacio $x > a$ que cruzan $x = a$.

$$J_{x-} = \frac{\phi_a \Sigma_S}{4\Sigma} + \frac{\Sigma_S}{6\Sigma^2} \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)_a \quad (4.38)$$

Puesto que la condición de frontera pide que este número sea cero esta expresión da

$$0 = \frac{\phi_a \Sigma_S}{4\Sigma} + \frac{\Sigma_S}{6\Sigma^2} \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)_a \quad (4.39)$$

$$\frac{2}{3\Sigma} = - \frac{\phi_a}{\left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)_a} \quad (4.40)$$

Analicemos ahora la figura 4.10.

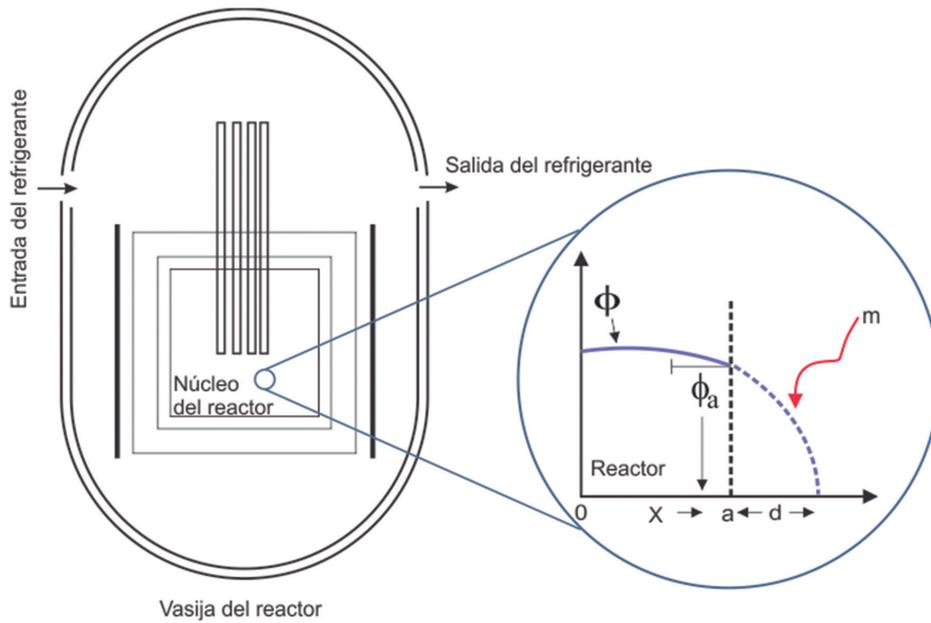


Figura 4.10. Cálculo de la distancia de extrapolación lineal.

La pendiente a la recta tangente a la curva ϕ en $x = a$ es

$$m = \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)_a$$

O también

$$m = \frac{0 - \phi_a}{(a + d) - a} = \frac{-\phi_a}{d}$$

Entonces,

$$\frac{-\phi_a}{d} = \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)_a$$

Por lo tanto

$$d = \frac{-\phi_a}{\left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)_a}$$

En base a la ecuación (4.40), se obtiene

$$d = \frac{2}{3\Sigma} = \frac{2}{3}\lambda_{\text{difusión}} \quad (4.41)$$

La teoría de transporte aplicada a este problema da:

$$d = \frac{0.7104}{(\Sigma - \bar{\mu}\Sigma_s)} \cong \frac{0.7104}{\Sigma(1 - \bar{\mu})} \quad (4.42)$$

$$d \cong 0.7104\lambda_{tr} \quad (4.43)$$

Donde

$$\lambda_{tr} = \frac{1}{\Sigma_s(1 - \bar{\mu})}$$

4.6. Ejemplos de solución de la ecuación de difusión

4.6.1. Ejemplo 1

Obtener la forma del flujo en un sistema de dos láminas yuxtapuestas, de propiedades neutrónicas diferentes, con una fuente plana uniforme, cuya intensidad es de S neutrones por centímetros cuadrados y por segundo, en una de sus caras exteriores.

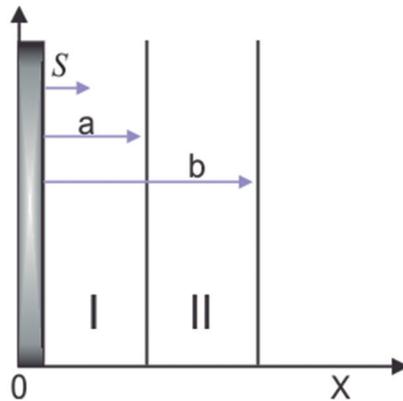


Figura 4.11. Representación para el ejemplo 1.

Partiendo de la ecuación de difusión estática:

$$\nabla^2 \phi - \frac{1}{L^2} \phi = \frac{-S}{D}$$

En este caso tenemos un problema en una dimensión y la ecuación de difusión se convierte en:

$$\frac{d^2 \phi}{dx^2} - \frac{1}{L^2} \phi = 0, x \neq 0 \quad (A)$$

El polinomio característico asociado a esta ecuación es:

$$\lambda^2 - \frac{1}{L^2} = 0 \Rightarrow \lambda = \pm \sqrt{\frac{1}{L^2}}$$

Por lo que la solución general de (A), para un medio no multiplicativo es:

$$\phi(x) = A' \operatorname{senh}\left(\frac{x}{L}\right) + C \operatorname{cosh}\left(\frac{x}{L}\right)$$

Ya que tenemos dos medios con propiedades neutrónicas diferentes, para cada región tendremos:

Región I:

$$\phi_I(x) = A'_I \operatorname{senh}\left(\frac{x}{L_I}\right) + C_I \operatorname{cosh}\left(\frac{x}{L_I}\right)$$

Región II:

$$\phi_{II}(x) = A'_{II} \operatorname{senh}\left(\frac{x}{L_{II}}\right) + C_{II} \operatorname{cosh}\left(\frac{x}{L_{II}}\right)$$

Las condiciones de frontera que han de imponerse en este caso son las siguientes:

a) Igualación de flujos en $X = a$

$$\phi_I(a) = \phi_{II}(a)$$

b) Igualación del vector de densidad de corriente en $x = a$,

$$-D_I \left[\frac{\partial \phi_I(x)}{\partial x} \right]_{x=a} = -D_{II} \left[\frac{\partial \phi_{II}(x)}{\partial x} \right]_{x=a}$$

c) Anulación del flujo en $x = b$ (b incluye la distancia de extrapolación).

$$\phi_{II}(b) = 0$$

d) Condición de fuente,

$$S = \lim_{x \rightarrow 0} -D_I \left[\frac{d\phi_I(x)}{dx} \right]$$

Aplicando las condiciones de frontera:

Aplicando c),

$$\phi_{II}(b) = A'_{II} \operatorname{senh} \left(\frac{b}{L_{II}} \right) + C_{II} \operatorname{cosh} \left(\frac{b}{L_{II}} \right) = 0$$

$$A'_{II} = -C_{II} \operatorname{coth} \left(\frac{b}{L_{II}} \right)$$

Aplicando d)

$$\phi_I = A'_I \operatorname{senh} \left(\frac{x}{L_I} \right) + C_I \operatorname{cosh} \left(\frac{x}{L_I} \right)$$

$$\frac{d\phi_I}{dx} = \frac{A'_I}{L_I} \operatorname{cosh} \left(\frac{x}{L_I} \right) + \frac{C_I}{L_I} \operatorname{senh} \left(\frac{x}{L_I} \right)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{-D_I A'_I}{L_I} \operatorname{cosh} \left(\frac{x}{L_I} \right) - \frac{D_I C_I}{L_I} \operatorname{senh} \left(\frac{x}{L_I} \right) \right] = \frac{-D_I A'_I}{L_I}$$

$$\frac{-D_I A_I'}{L_I} = S$$

$$A_I' = \frac{-S L_I}{D_I}$$

$$\phi_I = \frac{-S L_I}{D_I} \operatorname{senb}\left(\frac{x}{L_I}\right) + C_I \operatorname{cosh}\left(\frac{x}{L_I}\right)$$

$$\phi_{II}(x) = -C_{II} \operatorname{coth}\left(\frac{b}{L_{II}}\right) \operatorname{senb}\left(\frac{x}{L_{II}}\right) + C_{II} \operatorname{cosh}\left(\frac{x}{L_{II}}\right)$$

$$\phi_{II}(x) = C_{II} \left[\operatorname{cosh}\left(\frac{x}{L_{II}}\right) - \operatorname{coth}\left(\frac{b}{L_{II}}\right) \operatorname{senb}\left(\frac{x}{L_{II}}\right) \right]$$

Apliquemos ahora la condición a)

$$\frac{-S L_I}{D_I} \operatorname{senb}\left(\frac{a}{L_I}\right) + C_I \operatorname{cosh}\left(\frac{a}{L_I}\right) = C_{II} \left[\operatorname{cosh}\left(\frac{a}{L_{II}}\right) - \operatorname{coth}\left(\frac{b}{L_{II}}\right) \operatorname{senb}\left(\frac{a}{L_{II}}\right) \right]$$

$$C_I \operatorname{Cosh}\left(\frac{a}{L_I}\right) = C_{II} \left[\operatorname{cosh}\left(\frac{a}{L_{II}}\right) - \operatorname{coth}\left(\frac{b}{L_{II}}\right) \operatorname{senb}\left(\frac{a}{L_{II}}\right) \right] + \frac{S L_I}{D_I} \operatorname{senb}\left(\frac{a}{L_I}\right)$$

$$C_I = \frac{C_{II}}{\operatorname{cosh}\left(\frac{a}{L_I}\right)} \left[\operatorname{cosh}\left(\frac{a}{L_{II}}\right) - \operatorname{coth}\left(\frac{b}{L_{II}}\right) \operatorname{senb}\left(\frac{a}{L_{II}}\right) \right] + \frac{S L_I}{D_I} \operatorname{tanb}\left(\frac{a}{L_I}\right)$$

$$C_I = C_{II} A''$$

Únicamente nos resta determinar C_{II} . Apliquemos ahora la condición de frontera b)

$$-D_I \left[\frac{d\phi_I(x)}{dx} \right]_{x=a} = -D_{II} \left[\frac{d\phi_{II}(x)}{dx} \right]_{x=a}$$

$$\frac{-D_I}{L_I} \left[A_I' \operatorname{cosh}\left(\frac{a}{L_I}\right) + C_I \operatorname{senb}\left(\frac{a}{L_I}\right) \right] = \frac{-D_{II}}{L_{II}} \left[A_{II}' \operatorname{cosh}\left(\frac{a}{L_{II}}\right) + C_{II} \operatorname{senb}\left(\frac{a}{L_{II}}\right) \right]$$

$$\frac{-D_I}{L_I} \left[\frac{-SL_I}{D_I} \cosh\left(\frac{a}{L_I}\right) + C_{II} A'' \operatorname{senh}\left(\frac{a}{L_I}\right) \right] = \frac{D_{II}}{L_{II}} C_{II} \operatorname{coth}\left(\frac{b}{L_{II}}\right) \cosh\left(\frac{a}{L_{II}}\right) - \frac{D_{II}}{L_{II}} C_{II} \operatorname{senh}\left(\frac{a}{L_{II}}\right)$$

$$S \cosh\left(\frac{a}{L_I}\right) - C_{II} \frac{A'' D_I}{L_I} \operatorname{senh}\left(\frac{a}{L_I}\right) = \frac{D_{II}}{L_{II}} C_{II} \operatorname{coth}\left(\frac{b}{L_{II}}\right) \cosh\left(\frac{a}{L_{II}}\right) - \frac{D_{II}}{L_{II}} C_{II} \operatorname{senh}\left(\frac{a}{L_{II}}\right)$$

de la anterior ecuación despejamos C_{II} :

$$C_{II} = \frac{S \cosh\left(\frac{a}{L_I}\right)}{\left[\frac{D_{II}}{L_{II}} \operatorname{coth}\left(\frac{b}{L_{II}}\right) \cosh\left(\frac{a}{L_{II}}\right) - \frac{D_{II}}{L_{II}} \operatorname{senh}\left(\frac{a}{L_{II}}\right) + \frac{A'' D_I}{L_I} \operatorname{senh}\left(\frac{a}{L_I}\right) \right]}$$

Por lo tanto

$$\phi_I(x) = \frac{-S L_I}{D_I} \operatorname{senh}\left(\frac{x}{L_I}\right) + C_{II} A'' \cosh\left(\frac{x}{L_I}\right)$$

$$\phi_{II}(x) = C_{II} \left[\cosh\left(\frac{x}{L_{II}}\right) - \operatorname{coth}\left(\frac{b}{L_{II}} \operatorname{senh}\left(\frac{x}{L_{II}}\right)\right) \right]$$

Ejercicio: Investigue los valores de las constantes nucleares para dos materiales diferentes, proponga varios valores para la intensidad de la fuente y grafique la distribución de neutrones en las dos regiones como función de la posición.

4.6.2. Ejemplo 2

Obtener la forma del flujo en un sistema de dos esferas concéntricas, de propiedades neutrónicas diferentes; en el centro hay una fuente puntual cuya intensidad es de S neutrones por segundo por centímetro cúbico (véase figura 4.12).

La ecuación de difusión estática en coordenadas esféricas es:

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d\phi}{dr} \right) - \frac{1}{L^2} \phi = -\frac{S}{D}$$

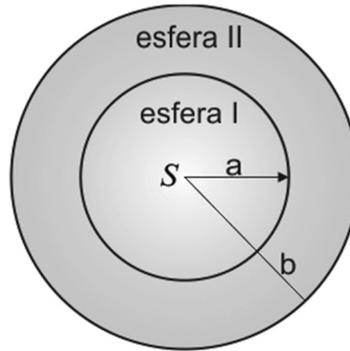


Figura 4.12. Representación para el ejemplo 2.

En nuestro caso,

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d\phi}{dr} \right) - \frac{1}{L^2} \phi = 0, \quad r \neq 0$$

Haciendo el cambio de variable

$$w = r\phi$$

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d}{dr} \left(\frac{w}{r} \right) \right) - \frac{1}{L^2} \frac{w}{r} = 0$$

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d}{dr} (r^{-1}w) \right) - \frac{1}{L^2} \frac{w}{r} = 0$$

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \left(r^{-1} \frac{dw}{dr} - \frac{w}{r^2} \right) \right) - \frac{1}{L^2} \frac{w}{r} = 0$$

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dw}{dr} - w \right) - \frac{1}{L^2} \frac{w}{r} = 0$$

derivando otra vez

$$\frac{1}{r^2} \left(\frac{dw}{dr} + r \frac{d^2w}{dr^2} - \frac{dw}{dr} \right) - \frac{1}{L^2} \frac{w}{r} = 0$$

$$\frac{1}{r} \frac{d^2 w}{dr^2} - \frac{1}{L^2} \frac{w}{r} = 0$$

$$\frac{d^2 w}{dr^2} - \frac{1}{L^2} w = 0 \quad (\text{B})$$

Esta ecuación tiene asociado el polinomio característico:

$$\lambda^2 - \frac{1}{L^2} = 0 \Rightarrow \lambda = \pm \sqrt{\frac{1}{L^2}} = \pm \frac{1}{L}$$

Lo cual indica que la solución de (B) es,

$$w = A \operatorname{senh}\left(\frac{r}{L}\right) + C \operatorname{cosh}\left(\frac{r}{L}\right)$$

Pero

$$w = r\phi$$

$$\phi = \frac{A \operatorname{senh}\left(\frac{r}{L}\right)}{r} + \frac{C \operatorname{cosh}\left(\frac{r}{L}\right)}{r}$$

Como tenemos dos regiones, el flujo en cada región es:

Región I:

$$\phi_I = \frac{A_I \operatorname{senh}\left(\frac{r}{L_I}\right)}{r} + \frac{C_I \operatorname{cosh}\left(\frac{r}{L_I}\right)}{r}$$

Región II:

$$\phi_{II} = \frac{A_{II} \operatorname{senh}\left(\frac{r}{L_{II}}\right)}{r} + \frac{C_{II} \operatorname{cosh}\left(\frac{r}{L_{II}}\right)}{r}$$

Las condiciones de frontera que caracterizan nuestro problema son

- a) Igualación de flujos en $r = a$.

$$\phi_I(a) = \phi_{II}(a)$$

- b) Igualación del vector de densidad de corriente en $r = a$,

$$-D_I \left[\frac{\partial \phi_I(r)}{\partial r} \right]_{r=a} = -D_{II} \left[\frac{\partial \phi_{II}(r)}{\partial r} \right]_{r=a}$$

- c) Anulación del flujo en $r = b$

$$\phi_{II}(b) = 0$$

- d) Condición de fuente

$$\lim_{r \rightarrow 0} (4\pi r^2 J_I) = S$$

Aplicando c)

$$\phi_{II}(b) = \frac{A_{II} \operatorname{sen} b \left(\frac{b}{L_{II}} \right)}{b} + \frac{C_{II} \operatorname{cosh} \left(\frac{b}{L_{II}} \right)}{b} = 0$$

$$C_{II} = \frac{-A_{II} \operatorname{sen} b \left(\frac{b}{L_{II}} \right)}{\operatorname{cosh} \left(\frac{b}{L_{II}} \right)}$$

$$C_{II} = -A_{II} \operatorname{tanh} \left(\frac{b}{L_{II}} \right)$$

Aplicando d)

$$\phi_I = \frac{A_I \operatorname{sen} b \left(\frac{r}{L_I} \right)}{r} + \frac{C_I \operatorname{cosh} \left(\frac{r}{L_I} \right)}{r}$$

$$J_I = -D_I \left[\frac{-A_I \operatorname{senh}\left(\frac{r}{L_I}\right)}{r^2} + \left(\frac{A_I}{L_I}\right) \frac{\operatorname{cosh}\left(\frac{r}{L_I}\right)}{r} - \frac{C_I \operatorname{cosh}\left(\frac{r}{L_I}\right)}{r^2} + \left(\frac{C_I}{L_I}\right) \frac{\operatorname{senh}\left(\frac{r}{L_I}\right)}{r} \right]$$

$$4\pi r^2 J_I = -D_I 4\pi \left[-A_I \operatorname{senh}\left(\frac{r}{L_I}\right) + \left(\frac{A_I}{L_I}\right) r \operatorname{cosh}\left(\frac{r}{L_I}\right) - C_I \operatorname{cosh}\left(\frac{r}{L_I}\right) + \left(\frac{C_I}{L_I}\right) r \operatorname{senh}\left(\frac{r}{L_I}\right) \right]$$

$$\lim_{r \rightarrow 0} (4\pi r^2 J_I) = -D_I 4\pi (-C_I)$$

$$D_I 4\pi C_I = S$$

despejando C_I :

$$C_I = \frac{S}{4\pi D_I}$$

$$\phi_I = \frac{A_I \operatorname{senh}\left(\frac{r}{L_I}\right)}{r} + \left(\frac{S}{4\pi D_I}\right) \frac{\operatorname{cosh}\left(\frac{r}{L_I}\right)}{r}$$

$$\phi_{II} = \frac{A_{II} \operatorname{senh}\left(\frac{r}{L_{II}}\right)}{r} - A_{II} \operatorname{tanh}\left(\frac{b}{L_{II}}\right) \frac{\operatorname{cosh}\left(\frac{r}{L_{II}}\right)}{r}$$

Aplicando a)

$$\phi_I(a) = \phi_{II}(a)$$

$$\frac{A_I \operatorname{senh}\left(\frac{a}{L_I}\right)}{a} + \left(\frac{S}{4\pi D_I}\right) \frac{\operatorname{cosh}\left(\frac{a}{L_I}\right)}{a} = A_{II} \left[\frac{\operatorname{senh}\left(\frac{a}{L_{II}}\right)}{a} - \operatorname{tanh}\left(\frac{b}{L_{II}}\right) \frac{\operatorname{cosh}\left(\frac{a}{L_{II}}\right)}{a} \right]$$

$$\frac{A_I \operatorname{senb}\left(\frac{a}{L_I}\right)}{a} = A_{II} \left[\frac{\operatorname{senb}\left(\frac{a}{L_{II}}\right)}{a} - \operatorname{Tanb}\left(\frac{b}{L_{II}}\right) \frac{\operatorname{cosh}\left(\frac{a}{L_{II}}\right)}{a} \right] - \left(\frac{S}{4\pi D_I} \right) \frac{\operatorname{cosh}\left(\frac{a}{L_I}\right)}{a}$$

$$A_I = A_{II} \operatorname{csch}\left(\frac{a}{L_I}\right) \left[\operatorname{senb}\left(\frac{a}{L_{II}}\right) - \operatorname{tanb}\left(\frac{b}{L_{II}}\right) \operatorname{cosh}\left(\frac{a}{L_{II}}\right) \right] - \left(\frac{S}{4\pi D_I} \right) \operatorname{coth}\left(\frac{a}{L_I}\right)$$

$$\alpha = \operatorname{csch}\left(\frac{a}{L_I}\right) \left[\operatorname{senb}\left(\frac{a}{L_{II}}\right) - \operatorname{tanb}\left(\frac{b}{L_{II}}\right) \operatorname{cosh}\left(\frac{a}{L_{II}}\right) \right] - \left(\frac{S}{4\pi D_I} \right) \operatorname{coth}\left(\frac{a}{L_I}\right)$$

$$A_I = A_{II} \alpha$$

$$\phi_I = A_{II} \alpha \frac{\operatorname{senb}\left(\frac{r}{L_I}\right)}{r} + \left(\frac{S}{4\pi D_I} \right) \frac{\operatorname{cosh}\left(\frac{r}{L_I}\right)}{r}$$

$$\phi_{II} = A_{II} \left[\frac{\operatorname{senb}\left(\frac{r}{L_{II}}\right)}{r} - \operatorname{tanb}\left(\frac{b}{L_{II}}\right) \frac{\operatorname{cosh}\left(\frac{r}{L_{II}}\right)}{r} \right]$$

Aplicando b)

$$-D_I \left[\frac{\partial \phi_I(r)}{\partial r} \right]_{r=a} = -D_{II} \left[\frac{\partial \phi_{II}(r)}{\partial r} \right]_{r=a}$$

Se encuentra la última constante desconocida.

4.6.3. Ejemplo 3

Un moderador infinito contiene uniformemente distribuidas fuentes isotrópicas emitiendo S neutrones por centímetro cúbico por segundo. Determine el flujo y la corriente en cualquier punto en el medio.

La ecuación de difusión es:

$$D\nabla^2\phi - \Sigma_a\phi + S = \frac{\partial n}{\partial t}$$

$$D\nabla^2\phi - \Sigma_a\phi + S = \frac{1}{v} \frac{\partial \phi}{\partial t}$$

Calculando el flujo en estado estacionario,

$$D\nabla^2\phi - \Sigma_a\phi + S = 0$$

Por una parte el sistema en consideración es infinito, por lo que no hay escapes. Por otra parte, las fuentes están uniformemente distribuidas y no hay variación del flujo en el espacio.

$$\Rightarrow D\nabla^2\phi = 0$$

Por lo tanto, la ecuación de difusión en estado estacionario queda:

$$-\Sigma_a\phi + S = 0$$

$$\phi = \frac{S}{\Sigma_a} = \text{Constante}$$

En consecuencia,

$$\vec{J} = -D\nabla\phi = 0$$

Comentario:

- a) En un medio finito, el flujo se pandea debido a las fronteras por las que hay escapes.
- b) Cuando hay un moderador infinito con fuentes distribuidas uniformemente, el flujo es constante en cualquier punto.

Como ϕ tiene una forma plana, no hay un flujo neto en una dirección determinada. Esto es, la corriente es cero. No se dispersan más neutrones en una dirección que en otra; todo es igual.

4.7. Longitud de difusión

Dada una fuente puntual de neutrones monoenergéticos en un medio infinito y homogéneo, con una absorción definida por una sección eficaz Σ_a y en el supuesto de que no haya intercambio energético entre el neutrón y el núcleo, se trata de averiguar a qué distancia de la fuente, en promedio, el neutrón es absorbido.

El número de neutrones absorbidos en un elemento diferencial de volumen dV situado a una distancia r de la fuente es

$$dn = \Sigma_a \phi(r) dv \quad (4.44)$$

En coordenadas esféricas

$$dv = 4\pi r^2 dr \quad (4.45)$$

$$dn = \Sigma_a \phi(r) 4\pi r^2 dr$$

El flujo desde una fuente puntual está dado por

$$\phi(r) = \frac{S e^{-\frac{r}{L}}}{4\pi D r} \quad (4.46)$$

Entonces,

$$dn = \Sigma_a \frac{S e^{-\frac{r}{L}}}{4\pi D r} 4\pi r^2 dr \quad (4.47)$$

$$dn = \Sigma_a \frac{S e^{-\frac{r}{L}}}{4\pi D} 4\pi r dr$$

La probabilidad de que un neutrón sea absorbido es igual al número total de neutrones absorbidos entre el número total que se producen, y esta dada por

$$P(r) dr = \frac{\Sigma_a}{D} r e^{-\frac{r}{L}} dr \quad (4.48)$$

Pero

$$L^2 = \frac{D}{\Sigma_a}$$

$$P(r) dr = \frac{r}{L^2} e^{-\frac{r}{L}} dr \quad (4.49)$$

Por lo tanto, aplicando la regla de promediado que se presentó en el capítulo 1, el promedio del cuadrado de la magnitud del vector neto hasta donde se lleva a cabo la absorción es

$$\langle r^2 \rangle = \frac{\int_0^\infty r^2 P(r) dr}{\int_0^\infty P(r) dr} \quad (4.50)$$

La función de distribución de probabilidades es obvio que debe estar normalizada ya que al ser infinito el sistema, el neutrón tendrá que ser absorbido. Comprobando

$$\int_0^\infty P(r) dr = \int_0^\infty \frac{r}{L^2} e^{-\frac{r}{L}} dr$$

$$= \frac{1}{L^2} \int_0^\infty r e^{-\frac{r}{L}} dr \quad \text{pero} \quad \int_0^\infty x^n e^{-ax} dx = \frac{n!}{a^{n+1}} \quad (4.51)$$

$$= \left(\frac{1}{L} \right) \frac{1!}{\left(\frac{1}{L} \right)^{1+1}} = 1$$

Entonces

$$\langle r^2 \rangle = \int_0^\infty r^2 P(r) dr$$

$$= \int_0^\infty r^2 \frac{r}{L^2} e^{-\frac{r}{L}} dr$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{L^2} \int_0^\infty r^3 e^{-\frac{r}{L}} dr \\
&= \left(\frac{1}{L^2} \right) \frac{3!}{\left(\frac{1}{L} \right)^{3+1}} = \frac{6}{L^2 \left(\frac{1}{L} \right)^4} \\
&\langle r^2 \rangle = 6L^2 \\
L^2 &= \frac{1}{6} \langle r^2 \rangle \tag{4.52}
\end{aligned}$$

$$L = \sqrt{\frac{\langle r^2 \rangle}{6}} \tag{4.53}$$

4.8. El método de difusión de grupos (Teoría de multigrupos)

Hemos trabajado hasta ahora con un modelo particularmente simple de la teoría de transporte, la teoría de difusión de neutrones monoenergéticos.

La principal deficiencia del modelo es la suposición de que todos los neutrones pueden estar caracterizados por únicamente una sola velocidad o energía.

Por una parte los neutrones en un reactor tienen energías comprendiendo el rango 10 MeV hasta menos de 0.01 eV (alrededor de nueve órdenes de magnitud), por otro lado, las secciones eficaces de interacción neutrón-núcleo dependen sensiblemente de la energía del neutrón incidente. Entonces no es sorprendente que los cálculos prácticos de un reactor requieran un tratamiento más realista de la dependencia en la energía del neutrón como una variable continua; esto se consigue discretizando la energía en intervalos o grupos de energía. Esto es, dividiremos el rango de energía del neutrón en N grupos de energía, como se muestra en la figura 4.13.

En el anterior esquema, el subíndice más bajo correspondiente a la máxima energía, mientras el más alto corresponde a la energía más baja.

Quizás la forma más directa en que podemos llegar a las ecuaciones de difusión de multigrupos es aplicado el concepto de balance de neutrones a un grupo de-

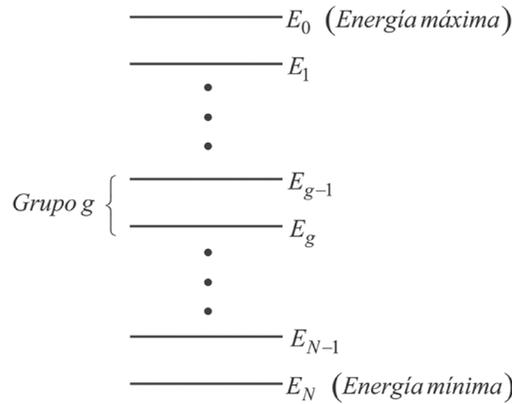


Figura 4.13. Discretización del espectro de energía.

terminado de energía, balanceando las maneras en que los neutrones puedan entrar o salir de este grupo. Consideremos entonces a un típico grupo de energía g .

El balance de neutrones para el grupo g se expresa como sigue:

$$\begin{array}{c}
 \left[\begin{array}{c} \text{Variación} \\ \text{en el} \\ \text{tiempo del} \\ \text{número de} \\ \text{neutrones en} \\ \text{el grupo } g \\ I \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c} \text{Neutrones} \\ \text{que desde} \\ \text{la fuente} \\ \text{aparecen} \\ \text{en} \\ \text{el grupo } g \\ II \end{array} \right] + \left[\begin{array}{c} \text{Neutrones} \\ \text{dispersados} \\ \text{dentro} \\ \text{del grupo } g \\ III \end{array} \right] - \left[\begin{array}{c} \text{Absorción} \\ \text{en el} \\ \text{grupo } g \\ IV \end{array} \right] - \left[\begin{array}{c} \text{Neutrones} \\ \text{dispersados} \\ \text{fuera del} \\ \text{grupo } g \\ V \end{array} \right] - \left[\begin{array}{c} \text{Cambio en} \\ \text{el número} \\ \text{de neutrones} \\ \text{debido al} \\ \text{escape} \\ VI \end{array} \right]
 \end{array}$$

Los términos de este balance tienen la siguiente forma

$$I = \frac{\partial n_g}{\partial t} = \frac{1}{v_g} \frac{\partial \phi_g}{\partial t} \tag{4.54}$$

Los neutrones que resultan de las fisiones tienen toda una gama de energías, por lo que hay posibilidades de que algunos neutrones de fisión tengan la energía dentro del grupo g estamos considerando. Así

$$II = S_g \quad (4.55)$$

Ahora sí,

$\Sigma_{S'_{gg}}$ \equiv probabilidad de que un neutrón se disperse desde un grupo g' hasta g .

$\Sigma_{S'_{gg}} \phi_{g'}$ \equiv número de neutrones dispersados en g desde g' por cm^3s .

Y si tenemos N grupos de energía, el número total de neutrones dispersados dentro de g será igual a:

$$III = \sum_{g'=1}^N \Sigma_{S'_{gg}} \phi_{g'} \quad (4.56)$$

Definiendo

Σ_{ag} \equiv probabilidad de que un neutrón se absorba dentro de las energías del grupo g .

Entonces,

$$IV = \Sigma_{ag} \phi_g \equiv \text{número de absorciones por } \text{cm}^3\text{s en } g \quad (4.57)$$

El número total de neutrones dispersados fuera del grupo g se encuentra de la siguiente manera.

$$\Sigma_{S_{gg'}} \equiv \text{probabilidad de que un neutrón se dispersará fuera de } g \quad (4.58)$$

$$\Rightarrow \Sigma_{S_{gg'}} \phi_g \equiv \text{número de neutrones dispersados fuera de } g \text{ por } \text{cm}^3\text{s}$$

Como hay N grupos,

$$V = \sum_{g'=1}^N \Sigma_{S_{gg'}} \phi_g \quad (4.59)$$

Por último, el escape de neutrones se encuentra definiendo un coeficiente de difusión promedio para todas las energías dentro del grupo.

$$D_g = \text{Coeficiente de difusión del grupo } g.$$

Entonces

$$\nabla I = \nabla \cdot (D_g \nabla \phi_g) \quad (4.60)$$

Por lo tanto llegamos a la expresión matemática del balance de neutrones en el grupo g de energía:

$$\frac{1}{v_g} \frac{\partial \phi_g}{\partial t} = \nabla \cdot (D_g \nabla \phi_g) - \Sigma_{ag} \phi_g + S_g - \sum_{g'=1}^N \Sigma_{S_{gg'}} \phi_{g'} + \sum_{g'=1}^N \Sigma_{S_{g'g}} \phi_{g'}, \quad (4.61)$$

$$g = 1, 2, \dots, N$$

En estado estacionario nuestro balance se convierte en

$$\nabla \cdot (D_g \nabla \phi_g) - \Sigma_{ag} \phi_g + S_g - \sum_{g'=1}^N \Sigma_{S_{gg'}} \phi_{g'} + \sum_{g'=1}^N \Sigma_{S_{g'g}} \phi_{g'} = 0 \quad (4.62)$$

Comentario: Los parámetros D_g , Σ_{ag} , $\Sigma_{S_{gg'}}$ y $\Sigma_{S_{g'g}}$ no son otra cosa que valores promedio, y se calculan de la siguiente manera:

$$D_g = \frac{\int_g D(E) \phi(E) dE}{\int_g \phi(E) dE} \quad (4.63)$$

$$\Sigma_{ag} = \frac{\int_g \Sigma_a(E) \phi(E) dE}{\int_g \phi(E) dE} \quad (4.64)$$

4.9. Difusión de neutrones térmicos

Trabajaremos ahora con neutrones de baja energía y dominaremos a este intervalo de energía como el grupo térmico. Los neutrones térmicos siguen aproximadamente una distribución Maxwelliana de energías dada por

$$n(E) = \frac{2\pi n}{(\pi kT)^{3/2}} E^{-2} e^{-\frac{E}{kT}} \quad (4.65)$$

donde

$$n(E) [=] \frac{\text{neutrones}}{\text{cm}^3 \text{ eV}}$$

$$n = \frac{\text{número total de neutrones térmicos}}{\text{cm}^3}$$

El flujo dependiente de la energía es

$$\phi(E) = n(E)v(E) \quad (4.66)$$

Si

$$v(E) = \left(\frac{2E}{m} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (4.67)$$

La ecuación (4.66) se convierte en:

$$\phi(E) = \frac{2\pi n}{(\pi kT)^{3/2}} \left(\frac{2}{m} \right)^{\frac{1}{2}} E e^{\frac{-E}{kT}} \quad (4.68)$$

El flujo térmico es entonces

$$\phi_T = \int_T \phi(E) dE \quad D \leq T \leq 5kT$$

O bien

$$\phi_T = \int_0^{5kT} \phi(E) dE$$

El flujo térmico se puede calcular con

$$\phi_T \cong \int_0^{\infty} \phi(E) dE$$

$$\phi_T \cong \frac{2\pi n}{(\pi kT)^{3/2}} \left(\frac{2}{m} \right)^{\frac{1}{2}} \int_0^{\infty} E e^{\frac{-E}{kT}} dE$$

Utilizando el resultado:

$$\int_0^{\infty} x^n e^{-ax} dx = \frac{n!}{a^{n+1}} \quad (4.69)$$

$$\phi_{\Gamma} \cong \frac{2\pi n}{(\pi kT)^{3/2}} \left(\frac{2}{m}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{1!}{\left(\frac{-1}{kT}\right)^{1+1}}$$

$$\phi_{\Gamma} \cong \frac{2\pi n}{(\pi kT)^{3/2}} \left(\frac{2}{m}\right)^{\frac{1}{2}} k^2 T^2 = \frac{2\pi n}{(\pi)^{3/2}} \left(\frac{2kT}{m}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\phi_{\Gamma} \cong \frac{2n}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{2kT}{m}\right)^{\frac{1}{2}}$$

La energía a la que el flujo es máximo, se encuentra derivando la ecuación (4.68) e igualando a cero:

$$\frac{d\phi}{dE} = \frac{2\pi n}{(\pi kT)^{3/2}} \left(\frac{2}{m}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{d}{dE} \left(E e^{\frac{-E}{kT}} \right)$$

$$\frac{d\phi}{dE} = \frac{2\pi n}{(\pi kT)^{3/2}} \left(\frac{2}{m}\right)^{\frac{1}{2}} \left(e^{\frac{-E}{kT}} - \frac{E}{kT} e^{\frac{-E}{kT}} \right)$$

Igualando a cero la derivada, $\frac{d\phi}{dE}$, se encuentra que

$$E_T = kT \quad (4.70)$$

lo cual era de esperarse de acuerdo a lo visto en el capítulo 2.

Note que aquí denotamos con E_T la energía a la que el flujo es máximo.

Por otra parte

$$E_T = \frac{1}{2} m (v_T)^2 \quad (4.71)$$

donde el subíndice T en la velocidad significa que corresponde a la energía E_T

Igualando (4.70) y (4.71)

$$kT = \frac{1}{2} m (v_T)^2$$

Se encuentra que

$$v_T = \left(\frac{2kT}{m} \right)^{\frac{1}{2}}$$

Por lo tanto, la ecuación (4.69) se puede escribir como:

$$\phi_T = \frac{2n v_T}{\sqrt{\pi}} \quad (4.72)$$

Si el flujo a 2200 m/s es equivalentemente a 0.025 eV

Y está dado por

$$\phi_o = n v_o \quad \left(v_o = 2200 \frac{m}{s} \right) \quad (4.73)$$

Procedemos a encontrar la relación entre ϕ_o y ϕ_T .

Dividiendo (4.73) entre (4.72):

$$\frac{\phi_o}{\phi_T} = \frac{n v_o}{\frac{2n v_T}{\sqrt{\pi}}} \quad (4.74)$$

$$\frac{\phi_o}{\phi_T} = \frac{\sqrt{\pi} v_o}{2 v_T}$$

Recordando que

$$v_T = \left(\frac{2kT}{m} \right)^{\frac{1}{2}}$$

Y ya que

$$v_o = \left(\frac{2kT_o}{m} \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\frac{v_o}{v_T} = \frac{\left(\frac{2k}{m} \right)^{\frac{1}{2}} (T_o)^{\frac{1}{2}}}{\left(\frac{2k}{m} \right)^{\frac{1}{2}} (T)^{\frac{1}{2}}} = \left(\frac{T_o}{T} \right)^{\frac{1}{2}}$$

Por lo tanto la ecuación (4.74) queda como:

$$\frac{\phi_o}{\phi_T} = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \left(\frac{T_o}{T} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (4.75)$$

Las constantes de difusión, dispersión y absorción se encuentran de la siguiente forma:

$$D_g = \frac{\int_g D(E)\phi(E)dE}{\int_g \phi(E)dE} \quad (4.76)$$

Si integramos solo en el rango de energías térmicas, entonces denotamos el coeficiente de difusión como

$$\bar{D} = \frac{\int_T D(E)\phi(E)dE}{\int_T \phi(E)dE} \quad (4.77)$$

La sección eficaz de absorción para el grupo térmico se denota por $\bar{\Sigma}_a$ y se encuentra con la siguiente ecuación:

$$\bar{\Sigma}_a = \frac{\int_T \Sigma_a(E) \phi(E) dE}{\int_T \phi(E) dE} \quad (4.78)$$

$$\bar{\Sigma}_a = \frac{\int_T \Sigma_a(E) \phi(E) dE}{\phi_T} \quad (4.79)$$

De acuerdo con Westcott,

$$\int_T \Sigma_a(E) \phi(E) dE = g_a(T) \bar{\Sigma}_a(E_0) \phi_0 \quad (4.80)$$

$$\bar{\Sigma}_a = g_a(T) \Sigma_a(E_0) \frac{\phi_0}{\phi_T} \quad (4.81)$$

Es decir, usando la ecuación (4.75):

$$\bar{\Sigma}_a = \frac{\sqrt{\pi}}{2} g_a(T) \Sigma_a(E_0) \left(\frac{T_0}{T} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (4.82)$$

donde en las anteriores fórmulas

$g_a(T)$: Factor no $1/v$

T_0 : Temperatura ambiente y $\Sigma_a(E_0)$: sección eficaz de absorción macroscópica a 0.025 eV.

La ecuación difusión para el grupo de energía térmico se escribe como:

$$\bar{D} \nabla^2 \phi_T - \bar{\Sigma}_a \phi_T = -S_T \quad (4.83)$$

donde $S_T \equiv$ densidad de neutrones térmicos desde la fuente.

Dividiendo entre el coeficiente de difusión \bar{D} de neutrones térmicos

$$\nabla^2 \phi_T - \frac{\bar{\Sigma}_a}{\bar{D}} \phi_T = \frac{-S_T}{\bar{D}}$$

$$L_T^2 \equiv \frac{\bar{D}}{\bar{\Sigma}_a} \quad (\text{Área de difusión térmica})$$

Entonces

$$\nabla^2 \phi_T - \frac{1}{(L_T)^2} \phi_T = \frac{-S_T}{D} \quad (4.84)$$

Cuando $T \neq 20^\circ\text{C}$

$$\bar{D}(P, T) = \bar{D}(P_o, T_o) \left(\frac{P_o}{P} \right) \left(\frac{T}{T_o} \right)^m \quad (4.85)$$

$$(L_T)^2(P, T) = (L_T)^2(P, T) \left(\frac{P_o}{P} \right)^2 \left(\frac{T}{T_o} \right)^{m+\frac{1}{2}} \quad (4.86)$$

$$m = \begin{cases} 0.470 & \text{para H}^2\text{O} \\ 0.112 & \text{para D}^2\text{O} \\ 0 & \text{para cualquier moderador} \\ & \text{distinto al agua ligera o pesada} \end{cases}$$

4.10. Cálculo de dos grupos en la moderación de neutrones

En los cálculos que involucran la criticidad de reactores térmicos, al menos dos grupos de energía de los neutrones deben ser usados para obtener resultados razonablemente correctos. Un grupo es necesario para describir los neutrones que tienen energías o grupo rápido, incluye a todos los neutrones que tienen energías arriba de la térmica, esto es, los neutrones que son moderadores desde las energías de fisión hasta cerca de 5KT.

Vamos a calcular ahora, el flujo de neutrones para dos grupos de energías, para el caso de una fuente puntual que está emitiendo S neutrones de fisión (rápidos) por segundo, dentro de un moderador uniforme, infinito.

Ya que se usarán valores promedio para las constantes de grupo, la dependencia del flujo solo será respecto al espacio.

$$\nabla \cdot (D_g \nabla \phi_g) - \Sigma_{ag} \phi_g + S_g - \sum_{g'=1}^N \Sigma_{S_{gg'}} \phi_{g'} + \sum_{g'=1}^N \Sigma_{S_{g'g}} \phi_{g'} = 0$$

$$\text{Si } n = 2 \Rightarrow g = 1, 2$$

Desarrollando las ecuaciones para cada grupo:

$$\nabla \cdot (D_1 \nabla \phi_1) - \Sigma_{a1} \phi_1 + S_1 - \sum_{g'=1}^2 \Sigma_{S_{1g'}} \phi_{g'} + \sum_{g'=1}^2 \Sigma_{S_{g'1}} \phi_{g'} = 0$$

$$\nabla \cdot (D_2 \nabla \phi_2) - \Sigma_{a2} \phi_2 + S_2 - \sum_{g'=1}^2 \Sigma_{S_{2g'}} \phi_{g'} + \sum_{g'=1}^2 \Sigma_{S_{g'2}} \phi_{g'} = 0$$

Efectuando las sumas:

$$\nabla \cdot (D_1 \nabla \phi_1) - \Sigma_{a1} \phi_1 + S_1 - (\Sigma_{S_{11}} \phi_1 + \Sigma_{S_{12}} \phi_1) + (\Sigma_{S_{11}} \phi_1 + \Sigma_{S_{21}} \phi_2) = 0$$

$$\nabla \cdot (D_2 \nabla \phi_2) - \Sigma_{a2} \phi_2 + S_2 - (\Sigma_{S_{21}} \phi_2 + \Sigma_{S_{22}} \phi_2) + (\Sigma_{S_{12}} \phi_1 + \Sigma_{S_{22}} \phi_2) = 0$$

Simplificando términos se obtiene el siguiente par de ecuaciones:

$$D_1 \nabla^2 \phi_1 - \Sigma_{a1} \phi_1 + S_1 - \Sigma_{S_{12}} \phi_1 + \Sigma_{S_{21}} \phi_2 = 0$$

$$D_2 \nabla^2 \phi_2 - \Sigma_{a2} \phi_2 + S_2 - \Sigma_{S_{21}} \phi_2 + \Sigma_{S_{12}} \phi_1 = 0$$

Suposiciones para simplificar las ecuaciones para dos grupos de energía.

Para el grupo 1:

- i) $\Sigma_{a1} \cong 0$ Porque las secciones eficaces de absorción de todos los materiales moderadores son pequeñas, especialmente arriba de la región de energías térmicas.
- ii) $S_1 = 0$ Porque no hay una distribución de fuentes de neutrones en el moderador, a excepción de la fuente puntual en $r=0$

iii) $\Sigma_{s_{21}} = 0$ No hay «up-scattering».

Por lo tanto la ecuación para el grupo rápido es simplemente:

$$D_1 \nabla^2 \phi_1 - \Sigma_{s_{12}} \phi_1 = 0$$

Dividiendo entre el coeficiente de difusión para el grupo rápido:

$$\nabla^2 \phi_1 - \frac{\Sigma_{s_{12}}}{D_1} \phi_1 = 0$$

Al producto de la sección eficaz de transferencia del grupo 1 al 2 por el flujo en el grupo. La densidad de moderación nos da el número de neutrones por cm^3s . Que pasan del grupo rápido al grupo de energías térmicas debido a las colisiones. Así

$$q_T \equiv \Sigma_{s_{12}} \phi_1 \equiv \text{Densidad de moderación}$$

Otro parámetro que se encuentra frecuentemente es la edad del neutrón.

La edad del neutrón se define como el cociente entre el coeficiente de difusión para el grupo 1 y la sección eficaz de transferencia del grupo 1 al 2, i.e.,

$$\zeta_T \equiv \frac{D_1}{\Sigma_{s_{12}}} \text{ (edad del neutrón), } \zeta_T [=] \text{cm}^2$$

Introduciendo la edad del neutrón en la ecuación de difusión para el grupo rápido nos queda la forma:

$$\nabla^2 \phi_1 - \frac{1}{\zeta_T} \phi_1 = 0$$

Se puede demostrar que es igual a un sexto del promedio del cuadrado de la magnitud del vector neto que va desde el punto donde un neutrón es emitido como neutrón rápido, al punto donde se modera a energías térmicas. Esto es

$$\zeta_T = \frac{1}{6} \langle r^2 \rangle$$

Suposiciones para el caso del grupo 2 ó grupo de neutrones lentos:

- i) $S_2 = 0$ No hay fuentes distribuidas por cm^3 en este problema.
- ii) $\Sigma_{S_{21}} = 0$ No hay «up-scattering» de neutrones térmicos.

Por lo tanto, la ecuación para el grupo térmico se simplifica a:

$$D_2 \nabla^2 \phi_2 - \Sigma_{a_2} \phi_2 + \Sigma_{S_{12}} \phi_1 = 0$$

O también

$$D_2 \nabla^2 \phi_2 - \Sigma_{a_2} \phi_2 = -\Sigma_{S_{12}} \phi_1$$

Cambiando el subíndice 2 que denota al grupo térmico por T .

$$\begin{aligned} 2 &\rightarrow T \\ D_2 &\rightarrow \bar{D} \\ \Sigma_{a_2} &\rightarrow \bar{\Sigma}_a \end{aligned}$$

Entonces la ecuación para el grupo térmico queda en la forma:

$$\bar{D} \nabla^2 \phi_T - \bar{\Sigma}_a \phi_T + \Sigma_{S_{12}} \phi_1 = 0$$

Rearreglando

$$\bar{D} \nabla^2 \phi_T - \bar{\Sigma}_a \phi_T = -\Sigma_{S_{12}} \phi_1$$

Finalmente

$$\nabla^2 \phi_T - \frac{1}{(L_T)^2} \phi_T = \frac{-\Sigma_{S_{12}} \phi_1}{\bar{D}}$$

Comentario: A bajas energías un neutrón puede ganar energía debido a una colisión con el núcleo de un átomo que se encuentre en movimiento térmico.

La dispersión hacia arriba (up scattering) predomina mientras el neutrón tiende al equilibrio térmico con los núcleos atómicos de un reactor.

Por lo tanto en un cálculo más exacto $\Sigma_{s21} \neq 0$.

En base a las suposiciones anteriores, nuestro objetivo es determinar tanto el flujo rápido como el térmico para el problema de la fuente puntual de neutrones rápidos. Para calcular estos flujos ya tenemos las ecuaciones para cada grupo, estas son.

$$\nabla^2 \phi_1 - \frac{1}{\zeta_T} \phi_1 = 0 \quad (4.87)$$

$$\nabla^2 \phi_T - \frac{1}{(L_T)^2} \phi_T = -\frac{\Sigma_{s12} \phi_1}{D} \quad (4.88)$$

Con simetría angular, sabemos que en coordenadas esféricas

$$\nabla^2 = \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d}{dr} \right)$$

Entonces sustituyendo, reescribimos (4.87) y (4.88)

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d\phi_1}{dr} \right) - \frac{1}{\zeta_T} \phi_1 = 0 \quad (4.89)$$

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d\phi_T}{dr} \right) - \frac{1}{(L_T)^2} \phi_T = -\frac{\Sigma_{s12}}{D} \phi_1 \quad (4.90)$$

Para poder resolver estas ecuaciones, proponemos un cambio de variable,

$$\omega_1 = r\phi_1$$

$$\omega_2 = r\phi_2$$

Sustituyendo y aplicando las derivadas correspondientes en la ecuación (4.89)

$$\begin{aligned} \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d}{dr} \left(\frac{\omega_1}{r} \right) \right) - \frac{1}{\zeta_T} \left(\frac{\omega_1}{r} \right) &= \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left[r^2 \left(\frac{1}{r} \frac{d\omega_1}{dr} + \omega_1 \left(\frac{-1}{r^2} \right) \right) \right] - \frac{1}{\zeta_T} \left(\frac{\omega_1}{r} \right) \\ &= \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left[\left(r \frac{d\omega_1}{dr} - \omega_1 \right) \right] - \frac{1}{\zeta_T} \left(\frac{\omega_1}{r} \right) = \frac{1}{r^2} \left(r \frac{d^2 \omega_1}{dr^2} \right) - \frac{1}{\zeta_T} \left(\frac{\omega_1}{r} \right) = \frac{1}{r} \left(\frac{d^2 \omega_1}{dr^2} \right) - \frac{1}{\zeta_T} \left(\frac{\omega_1}{r} \right) \end{aligned}$$

Finalmente multiplicamos por r y obtenemos,

$$\frac{d^2 \omega_1}{dr^2} - \frac{1}{\zeta_T} \omega_1 = 0 \quad (4.91)$$

De forma similar para la ecuación (4.90),

$$\frac{d^2 \omega_2}{dr^2} - \frac{1}{(L_T)^2} \omega_2 = -\frac{\Sigma_{S12}}{D} \omega_1 \quad (4.92)$$

Para resolver la ecuación (4.91) aplicamos las condiciones de frontera,

$$\phi \rightarrow 0, r \rightarrow \infty \Rightarrow \omega \rightarrow 0, r \rightarrow \infty$$

$$\lim_{r \rightarrow 0} 4\pi r^2 J_1 = S$$

La ecuación diferencial lineal de segundo orden tiene solución al resolver la ecuación característica de la misma, esto es, necesitamos resolver lo siguiente:

$$m^2 + m + C = 0$$

En nuestro caso tenemos solo

$$m^2 + C = 0$$

O bien

$$m^2 - \frac{1}{\zeta_T} = 0$$

Al resolver las raíces de esa ecuación tenemos lo siguiente:

$$m^2 - \frac{1}{\zeta_T} = 0$$

$$m^2 = \frac{1}{\zeta_T}$$

$$m = \pm \sqrt{\frac{1}{\zeta_T}}$$

$$m_1 = \frac{1}{\sqrt{\zeta_T}}$$

$$m_2 = \frac{-1}{\sqrt{\zeta_T}}$$

La anterior implica que la ecuación diferencial lineal de segundo orden tiene como solución general

$$\omega_1 = B_1 e^{m_1 r} + B_2 e^{m_2 r}$$

Sustituyendo las raíces que encontramos anteriormente obtenemos la solución general de nuestra ecuación diferencial, así tenemos:

$$\omega_1 = B_1 e^{\frac{r}{\sqrt{\zeta_T}}} + B_2 e^{\frac{-r}{\sqrt{\zeta_T}}}$$

Ahora la cuestión radica en encontrar los valores de nuestras constantes B_1 , B_2 ; aquí es donde entran nuestras condiciones de frontera.

Aplicando nuestra primer condición de frontera en la solución general obtenemos:

$$\omega_1 = B_1 e^{\frac{r}{\sqrt{\zeta_T}}} + B_2 e^{\frac{-r}{\sqrt{\zeta_T}}}$$

$$\omega_1 = B_2 e^{\frac{-r}{\sqrt{\zeta_T}}}$$

El argumento de la simplificación anterior es el siguiente: aunque matemáticamente es correcta la sustitución de la condición de frontera número uno, el sentido físico de que en el infinito el flujo para el grupo rápido sea infinito no tiene relevancia física, es por ello que se descarta el primer término.

Ahora para determinar B_2 aplicaremos la segunda condición de frontera:

$$\lim_{r \rightarrow 0} r^2 J_1 = \frac{S}{4\pi}$$

Ahora citando la ley de difusión, $J_1 = -D_1 \frac{d\phi}{dr}$, tenemos que

$$J_1 = -D_1 \frac{d}{dr} \left(\frac{\omega}{r} \right)$$

Primero encontramos la derivada $\frac{d}{dr} \left(\frac{\omega}{r} \right)$ de modo que

$$\frac{d}{dr} \left(\frac{\omega}{r} \right) = \left(\frac{r \frac{d\omega_1}{dr} - \omega_1}{r^2} \right)$$

$$\frac{d}{dr} \left(\frac{\omega}{r} \right) = \left(\frac{1}{r} \frac{d\omega_1}{dr} - \frac{\omega_1}{r^2} \right)$$

Entonces

$$J_1 = \left(D_1 \frac{\omega_1}{r^2} - D_1 \frac{1}{r} \frac{d\omega_1}{dr} \right)$$

Entonces

$$r^2 J_1 = \left(D_1 \omega_1 - D_1 r \frac{d\omega_1}{dr} \right)$$

Aplicando el límite tenemos que

$$\lim_{r \rightarrow 0} \left(D_1 \omega_1 - D_1 r \frac{d\omega_1}{dr} \right) = D_1 \omega_1$$

Y de la igualdad anterior obtenemos

$$D_1 \omega_1 = \frac{S}{4\pi}$$

Despejando

$$\omega_1 = \frac{S}{4\pi D_1}$$

De lo anterior tenemos que $\omega_1 = B_2 e^{\frac{-r}{\sqrt{\zeta_T}}}$ y al evaluar en $r = 0$, tenemos

$$\omega_1(0) = B_2 e^{\frac{-0}{\sqrt{\zeta_T}}}$$

$$\omega_1(0) = B_2 = \frac{S}{4\pi D_1}$$

Entonces $\omega_1 = \frac{S}{4\pi D_1} e^{\frac{-r}{\sqrt{\zeta_T}}}$ y con el cambio de variable $\omega_1 = \phi_1 r$, obtendremos

$$\phi_1 = \frac{S}{4\pi r D_1} e^{\frac{-r}{\sqrt{\zeta_T}}}$$

Entonces la solución para el flujo de neutrones en el grupo rápido es la siguiente:

$$\phi_1 = \frac{S}{D_1 4\pi r} e^{\frac{-r}{\sqrt{\zeta_T}}}$$

Ahora, la ecuación diferencial lineal ordinaria de segundo orden para el flujo térmico es igual a:

$$\frac{d^2 \omega_2}{dr^2} - \frac{\omega_2}{(L_T)^2} = -\frac{\Sigma_{s12}}{D} \omega_1$$

Sustituyendo la solución para el flujo rápido, tenemos que:

$$\frac{d^2 \omega_2}{dr^2} - \frac{\omega_2}{(L_T)^2} = -\frac{\Sigma_{s12}}{D} \frac{S}{4\pi D_1} e^{\frac{-r}{\sqrt{\zeta_T}}}$$

Con las siguientes condiciones de frontera

$$\phi_T \rightarrow 0, r \rightarrow \infty \Rightarrow \omega_2 \rightarrow 0, r \rightarrow \infty$$

$$\lim_{r \rightarrow 0} 4\pi r^2 J_2 = 0$$

La ecuación diferencial lineal ordinaria de segundo orden y no homogénea para el grupo térmico presenta la siguiente propiedad derivada de la teoría de solución de ecuaciones diferenciales:

$$\omega_2 = \omega_{\text{homogénea}} + \omega_{\text{particular}}$$

De manera análoga a la solución de la primera ecuación diferencial lineal ordinaria homogénea para el grupo rápido, la parte de la solución de la segunda ecuación diferencial lineal ordinaria homogénea para el flujo térmico o grupo térmico en forma general está dada por:

$$\omega_{2_{\text{homogénea}}} = C_1 e^{m_1 r} + C_2 e^{m_2 r}$$

Y para nuestro caso

$$\omega_{2_{\text{homogénea}}} = C_1 e^{\frac{r}{L_T}} + C_2 e^{\frac{-r}{L_T}}$$

Y de modo análogo al caso rápido, para obtener el valor de las constantes empleamos la condición de frontera

$$\phi_T \rightarrow 0, r \rightarrow \infty \Rightarrow \omega_2 \rightarrow 0, r \rightarrow \infty$$

Entonces

$$\omega_{2_{\text{homogénea}}} = C_2 e^{\frac{-r}{L_T}}$$

Ahora podemos proponer una solución particular para nuestra ecuación diferencial lineal ordinaria de segundo orden y no homogénea de la siguiente manera:

$$\omega_{2_{\text{Particular}}} = K e^{\frac{-r}{L_T}}$$

Así al sustituir la solución anteriormente propuesta en

$$\frac{d^2 \omega_{2\text{Particular}}}{dr^2} - \frac{\omega_{2\text{Particular}}}{L_T^2} = -\frac{\Sigma_{S12}}{D} \frac{S}{4\pi D_1} e^{\frac{-r}{\sqrt{\zeta_T}}}$$

tenemos

$$\frac{d^2}{dr^2} \left(K e^{\frac{-r}{\sqrt{\zeta_T}}} \right) - \frac{K e^{\frac{-r}{\sqrt{\zeta_T}}}}{L_T^2} = -\frac{\Sigma_{S12}}{D} \frac{S}{4\pi D_1} e^{\frac{-r}{\sqrt{\zeta_T}}}$$

Encontrando la derivada obtenemos

$$\frac{K e^{\frac{-r}{\sqrt{\zeta_T}}}}{\zeta_T} - \frac{K e^{\frac{-r}{\sqrt{\zeta_T}}}}{L_T^2} = -\frac{\Sigma_{S12}}{D} \frac{S}{4\pi D_1} e^{\frac{-r}{\sqrt{\zeta_T}}}$$

Entonces

$$K e^{\frac{-r}{\sqrt{\zeta_T}}} \left(\frac{1}{\zeta_T} - \frac{1}{L_T^2} \right) = -\frac{\Sigma_{S12}}{D} \frac{S}{4\pi D_1} e^{\frac{-r}{\sqrt{\zeta_T}}}$$

$$K = -\frac{\Sigma_{S12}}{D} \frac{S}{4\pi D_1} \frac{1}{\left(\frac{1}{\zeta_T} - \frac{1}{L_T^2} \right)}$$

$$K = -\frac{\Sigma_{S12} L_T^2 \zeta_T S}{4\pi D_1 \bar{D} (L_T^2 - \zeta_T)}$$

Así la solución particular es

$$\omega_{2\text{Particular}} = -\frac{\Sigma_{S12} L_T^2 \zeta_T S}{4\pi D_1 \bar{D} (L_T^2 - \zeta_T)} e^{\frac{-r}{\sqrt{\zeta_T}}}$$

Y entonces la solución de la ecuación diferencial es para flujo térmico es la siguiente:

$$\omega_2 = C_2 e^{\frac{-r}{L_T}} - \frac{\Sigma_{S_{12}} L_T^2 \zeta_T S}{4\pi D_1 \bar{D} (L_T^2 - \zeta_T)} e^{\frac{-r}{\sqrt{\zeta_T}}}$$

Por último aplicamos

$$\lim_{r \rightarrow 0} 4\pi r^2 J_2 = 0$$

a la ecuación para el flujo térmico

$$\phi_2 = \phi_T = \frac{C_2 e^{\frac{-r}{L_T}}}{r} - \frac{\Sigma_{S_{12}} L_T^2 \zeta_T S}{4\pi r D_1 \bar{D} (L_T^2 - \zeta_T)} e^{\frac{-r}{\sqrt{\zeta_T}}}$$

De la ecuación de difusión: $J_2 = -\bar{D} \frac{d\phi_2}{dr}$, aplicando esta ley a la ecuación:

$$J_2 = -\bar{D} \frac{d}{dr} \left(\frac{C_2 e^{\frac{-r}{L_T}}}{r} - \frac{\Sigma_{S_{12}} L_T^2 \zeta_T S}{4\pi r D_1 \bar{D} (L_T^2 - \zeta_T)} e^{\frac{-r}{\sqrt{\zeta_T}}} \right)$$

Definimos a: $\alpha = \frac{\Sigma_{S_{12}} L_T^2 \zeta_T S}{4\pi r D_1 \bar{D} (L_T^2 - \zeta_T)}$

$$\Rightarrow J_2 = -\bar{D} \left(\frac{-C_2 e^{\frac{-r}{L_T}}}{L_T r} - \frac{C_2 e^{\frac{-r}{L_T}}}{r^2} + \frac{\alpha}{r \sqrt{\zeta_T}} e^{\frac{-r}{\sqrt{\zeta_T}}} + \frac{\alpha}{r^2} e^{\frac{-r}{\sqrt{\zeta_T}}} \right)$$

$$\Rightarrow J_2 (4\pi r^2) = -\bar{D} 4\pi \left(-C_2 e^{\frac{-r}{L_T}} \left(\frac{r}{L_T} + 1 \right) + \alpha e^{\frac{-r}{\sqrt{\zeta_T}}} \left(\frac{r}{\sqrt{\zeta_T}} + 1 \right) \right)$$

Aplicando el límite:

$$\lim_{r \rightarrow 0} J_2 (4\pi r^2) = -\bar{D} 4\pi [-C_2 + \alpha] = 0$$

Encontramos que: $C_2 = \alpha$

Finalmente la solución general:

$$\phi_T = \frac{\Sigma_{S12} L_T^2 \zeta_T S}{4\pi r D_1 \bar{D} (L_T^2 - \zeta_T)} e^{\frac{-r}{L_T}} - \frac{\Sigma_{S12} L_T^2 \zeta_T S}{4\pi r D_1 \bar{D} (L_T^2 - \zeta_T)} e^{\frac{-r}{\sqrt{\zeta_T}}}$$

O bien

$$\phi_T = \frac{\Sigma_{S12} L_T^2 \zeta_T S}{4\pi r D_1 \bar{D} (L_T^2 - \zeta_T)} \left(e^{\frac{-r}{L_T}} - e^{\frac{-r}{\sqrt{\zeta_T}}} \right)$$

De la definición:

$$\frac{\Sigma_{S12}}{D_1} = \frac{1}{\zeta_T}$$

La solución de la ecuación queda:

$$\phi_T = \frac{S L_T^2}{4\pi r \bar{D} (L_T^2 - \zeta_T)} \left(e^{\frac{-r}{L_T}} - e^{\frac{-r}{\sqrt{\zeta_T}}} \right)$$

La cuál es la solución buscada para el grupo térmico.

PROBLEMAS Y PREGUNTAS PARA EL CAPÍTULO 4

1. Cuando los procesos dentro de un reactor nuclear son tratados en tal forma que un promedio es usado para cada tipo de evento nuclear, sobre el intervalo (espectro) total de las energías de los neutrones, el tratamiento es llamado:
 - a) Teoría de un grupo de energía.
 - b) Teoría de dos grupos de energía.
 - c) Teoría de multigrupos de energía.
 - d) Ninguna de las anteriores respuestas.

2. Si queremos evaluar el número de dispersiones (colisiones) por cm^3 por segundo, se debe usar:
 - a) $R_s = \phi \sigma_s n_{at}$.
 - b) $R_a = \phi \sigma n_{at}$.
 - c) $R_f = \phi \sigma_f n_{at}$.

3. Expresión para la ley de Fick en teoría del reactor nuclear:
 - a) $J = -D \nabla \phi$.
 - b) $J = D \nabla \phi$.
 - c) $\phi = nv$.

4. Identifique el término de pérdidas por absorción en la ecuación de difusión:
 - a) $-(1/L^2)\phi$.
 - b) $-S/d$.
 - c) $\nabla^2 \phi$.
 - d) Ninguna de las expresiones anteriores.

5. Identifique el término de fuente en la ecuación de difusión:
 - a) $-(1/L^2)\phi$.
 - b) $-S/d$.
 - c) $\nabla^2 \phi$.
 - d) Ninguna de las expresiones anteriores.

6. Identifique el término relacionado con la difusión de neutrones en la ecuación de difusión:
- a) $-(1/L^2)\phi$.
 - b) $-S/d$.
 - c) $\nabla^2\phi$.
 - d) Ninguna de las expresiones anteriores.
7. El flujo de neutrones en la superficie de un reactor nuclear es igual a:
- a) $\phi(a) = 0$, donde a es la coordenada de la superficie.
 - b) $\phi(a + d) = 0$.
 - c) $d\phi/dx = 0$.
8. Una esfera de moderador de radio r contiene una fuente puntual colocada en el centro de la esfera emitiendo s neutrones/s.
- a) Encuentre el flujo de neutrones en la esfera. Grafique el resultado.
 - b) Deduzca una expresión para la densidad de corriente en cualquier punto dentro de la esfera. Grafique el resultado.
 - c) ¿Cuántos neutrones escapan de la esfera por segundo? Grafique el resultado como función del tamaño de la esfera, hasta valores muy grandes.
 - d) ¿Cuál es la probabilidad promedio de que un neutrón de la fuente escapara de la esfera? Grafique la probabilidad como función del radio de la esfera.

TEORÍA DEL REACTOR NUCLEAR

5.1. Neutrones de fisión

En la reacción de fisión nuclear además de los fragmentos de fisión se producen neutrones. Estos neutrones pueden usarse para continuar la reacción en cadena. La mayoría de los neutrones de fisión aparecen instantáneamente (dentro de 10^{-14} s) después del evento de fisión. Estos neutrones son llamados inmediatos.

Sin embargo, muy pocos neutrones (menos del 1%) aparecen con un tiempo de retraso apreciable después del decaimiento de los productos de fisión.

Al menos seis de los productos de fisión sufren decaimiento radioactivo en los cuales se emiten los neutrones diferidos, con vidas medias de 55.6 s, 22.0 s, 4.51 s, 1.52 s, 0.43 s, y 0.05 s, respectivamente. La aparición de estos neutrones diferidos tiene consecuencias muy importantes en el control del reactor nuclear.

El número total de neutrones (tanto inmediatos y diferidos) producidos en una reacción de fisión variará. Sin embargo, en la mayoría de las aplicaciones únicamente se necesita conocer el número promedio de los neutrones producidos por

fisión, denotado con el símbolo ν . Esta cantidad dependerá tanto del isótopo involucrado en la reacción de fisión como de la energía del neutrón incidente, generalmente tendiendo a incrementarse con el incremento de la energía del neutrón.

La función $\nu(E)$ para los principales isótopos fisiles está dada en forma general por,

$$\nu(E) = \nu_0 + aE \quad (5.1)$$

Donde ν_0 y a son constantes.

El número promedio de neutrones por fisión ν como función de la energía para el Pu-239, U-235 y U-233 está dado por las relaciones,

$$\nu^{49} = 2.874 + 0.138E \quad (5.2)$$

$$\nu^{25} = \begin{cases} 2.432 + 0.066E, & 0 \leq E \leq 1 \\ 2.349 + 0.150E, & E > 1 \end{cases} \quad (5.3)$$

$$\nu^{23} = \begin{cases} 2.482 + 0.075E, & 0 \leq E \leq 1 \\ 2.412 + 0.136E, & E > 1 \end{cases} \quad (5.4)$$

Donde E está en MeV.

5.2. El factor η

Cuando un núcleo fisil absorbe un neutrón puede ocurrir una reacción de fisión, de captura radiactiva, etc. Si estamos interesados en la reacción de fisión, la probabilidad de que ocurra es,

$$P_{fisión} = \frac{\Sigma_f}{\Sigma_a} \quad (5.5)$$

O también

$$P_{fisión} = \frac{N\sigma_f}{N\sigma_a} = \frac{\sigma_f}{\sigma_a} \quad (5.6)$$

Donde N es la densidad física del núcleo fisil, σ_f es la probabilidad de que ocurra el evento de fisión y σ_a es la probabilidad de que ocurra cualquier tipo de reacción de absorción.

En forma equivalente la probabilidad de fisión se da por,

$$P_{fisión} = \frac{\sigma_F}{[\sigma_F + \sigma_\gamma + \sigma_{n,2n} + \dots]} \quad (5.7)$$

A bajas energías los eventos predominantes son la captura radiativa y la fisión. Así la ecuación (5.7) se convierte en,

$$P_{fisión} = \frac{\sigma_F}{\sigma_F + \sigma_\gamma} \quad (5.8)$$

Un parámetro que se utiliza en los cálculos de reactores es η y representa al número de neutrones desprendidos por neutrón absorbido en un núcleo fisil y es igual al factor ν multiplicado por la probabilidad de fisión,

$$\eta = \nu P_{fisión} \quad (5.9)$$

$$\eta = \nu \frac{\sigma_F}{\sigma_a} \quad (5.10)$$

Para una mezcla de isótopos físis y no físis llamada «combustible»; η es el número promedio de neutrones producidos por neutrón absorbido en la mezcla. Así para un reactor térmico de uranio natural

$$\eta = \frac{\nu^{25} (\Sigma_F)^{25}}{(\Sigma_a)^{25} + (\Sigma_a)^{28}} \quad (5.11)$$

En un reactor rápido alimentando con U-238 y U-235

$$\eta = \frac{\nu^{25} (\Sigma_F)^{25} + \nu^{28} (\Sigma_F)^{28}}{(\Sigma_a)^{25} + (\Sigma_a)^{28}} \quad (5.12)$$

Algunos valores de los parámetros ν y η se muestran en la tabla 5.1 para tres niveles de energía.

Energía del neutrón	U-233		U-235		U-238		Pu-239	
	ν	η	ν	η	ν	η	ν	η
Térmica (0.025 eV)	2.5	2.3	2.43	2.07	–	–	2.89	2.11
1 MeV	2.62	2.54	2.58	2.38	–	–	3.00	2.92
2 MeV	2.73	2.57	2.7	2.54	2.69	2.46	3.11	2.99

Tabla 5.1. Neutrones rápidos emitidos por fisión (ν) y por neutrones absorbido (η)

5.3. El término de fuente (S) en la ecuación de difusión

El flujo de neutrones en un reactor rápido, crítico, infinito, homogéneo, i.e., un reactor en el que el combustible y el refrigerante están mezclados de tal forma que solo hay una fase y además está desnudo, o sea, el reactor consiste de una sola región, está descrito por la ecuación.

$$D \nabla^2 \phi - \Sigma_a \phi = -S \quad (5.13)$$

En esta ecuación ϕ es el flujo de neutrones para un grupo de energía, D y Σ_a son las constantes de grupo para la mezcla homogénea de combustible y refrigerante, mientras que S es el término de fuente de neutrones por cm^3s .

En un reactor crítico la fuente de neutrones se debe únicamente a la reacción de fisión nuclear. Para determinar S consideraremos a la sección eficaz macroscópica de absorción del combustible Σ_{aF} y sea η el número promedio de neutrones de fisión emitidos por neutrón absorbido en el combustible. El término de fuentes es,

$$S = \eta \Sigma_{aF} \phi \quad (5.14)$$

O también

$$S = \eta \frac{\Sigma_{aF}}{\Sigma_a} \Sigma_a \phi \quad (5.15)$$

Así el término de fuente queda en la forma,

$$S = \eta f \Sigma_a \phi \quad (5.16)$$

donde

$$f = \frac{\Sigma_a F}{\Sigma_a}$$

Es llamada la utilización del combustible. Este factor nos da la fracción de neutrones que son absorbidos por el combustible del total que son absorbidos por el reactor.

Sea $\Sigma_a \phi$ el número de absorciones por cm^3 por segundo, entonces $f \Sigma_a \phi$ será el número de absorciones por $\text{cm}^3 \cdot \text{s}$. En el combustible, de estas absorciones se producirán $\eta f \Sigma_a \phi$ neutrones de fisión por neutrón absorbido en el combustible, que serán nuevamente absorbidos por el reactor infinito. Por lo tanto, $\Sigma_a \phi$ absorciones en una generación conduce a la absorción de $\eta f \Sigma_a \phi$ neutrones en la generación siguiente. Recordando la definición de factor de multiplicación infinito

$$K_\infty = \frac{\text{neutrones de fisión en una generación}}{\text{neutrones de fisión en la generación anterior}}$$

ó

$$K_\infty = \frac{\text{algún evento en una generación}}{\text{el mismo evento en la generación anterior}}$$

Es decir,

$$K_\infty = \frac{\text{absorciones en una generación}}{\text{absorciones en la generación anterior}}$$

$$K_\infty = \frac{\eta f \Sigma_a \phi}{\Sigma_a \phi} = \eta f \quad (5.17)$$

En consecuencia el término de fuente queda en la forma

$$S = K_\infty \Sigma_a \phi \quad (5.18)$$

Es conveniente notar que también se puede aplicar a un reactor finito ya que únicamente depende de la composición del reactor. Esto es, un reactor finito con la misma composición tiene la misma K_∞ que la de un reactor infinito con la misma composición.

5.4. El reactor en forma de placa (dependiente del tiempo)

Con el fin de introducir los conceptos que serán básicos en el desarrollo de la teoría del reactor nuclear, consideremos un reactor en forma de placa infinita de espesor « a » extrapolado, que tiene una distribución uniforme de fuentes de neutrones. Para calcular el flujo de neutrones dependiente del tiempo, escribamos la ecuación de difusión de estado no estacionario,

$$\bar{D} \nabla^2 \phi - \Sigma_a \phi + S = \frac{1}{v} \frac{\partial \phi}{\partial t}$$

La anterior ecuación está sujeta a las siguientes condiciones iniciales y de frontera:

$$\begin{aligned} \phi(x, 0) &= \phi_0 \\ J(0) &= 0 \\ \phi\left(\frac{a}{2}\right) &= 0 \end{aligned} \tag{5.19}$$

Entonces

$$\nabla^2 \phi - \frac{\Sigma_a}{D} \phi + \frac{S}{D} = \frac{1}{vD} \frac{\partial \phi}{\partial t}$$

pero

$$\frac{\Sigma_a}{D} = \frac{1}{L_2} \tag{5.20}$$

$$\nabla^2 \phi - \frac{1}{L_2} \phi + \frac{K_\infty \Sigma_a \phi}{D} = \frac{1}{vD} \frac{\partial \phi}{\partial t} \tag{5.21}$$

$$\nabla^2 \phi - \frac{1}{L_2} \phi + \frac{1}{L_2} K_\infty \phi = \frac{1}{vD} \frac{\partial \phi}{\partial t} \tag{5.22}$$

$$\nabla^2 \phi + \frac{(K_\infty - 1)}{L_2} \phi = \frac{1}{vD} \frac{\partial \phi}{\partial t} \tag{5.23}$$

En este caso $\phi = \phi(x, t)$ y se propone una solución del tipo,

$$\phi = \psi(x)T(t) \quad (5.24)$$

Entonces

$$\frac{\partial^2 [\psi T]}{\partial x^2} + \frac{(K_\infty - 1)}{L_2} \psi T = \frac{1}{vD} \frac{\partial [\psi T]}{\partial t}$$

Desarrollando

$$T \frac{d^2 \psi}{dx^2} + \frac{(K_\infty - 1)}{L_2} \psi T = \frac{\psi}{vD} \frac{dT}{dt}$$

Dividiendo toda la ecuación anterior entre ψT :

$$\frac{1}{\psi} \frac{d^2 \psi}{dx^2} + \frac{(K_\infty - 1)}{L_2} = \frac{1}{vDT} \frac{dT}{dt}$$

Entonces

$$\frac{vD}{\psi} \frac{d^2 \psi}{dx^2} + vD \frac{(K_\infty - 1)}{L_2} = \frac{1}{T} \frac{dT}{dt} \quad (5.25)$$

$$\frac{1}{\psi} \left[vD \frac{d^2 \psi}{dx^2} + vD \frac{(K_\infty - 1)}{L_2} \psi \right] = \frac{1}{T} \frac{dT}{dt} \equiv -\lambda = \text{constante} \quad (5.26)$$

Es así como nos resultan dos ecuaciones diferenciales ordinarias

$$\frac{dT}{dt} = -\lambda T \quad (5.27)$$

$$\frac{1}{\psi} \left[vD \frac{d^2 \psi}{dx^2} + vD \frac{(K_\infty - 1)}{L_2} \psi \right] = -\lambda \quad (5.28)$$

Trabajaremos ahora con la ecuación (5.28)

$$vD \frac{d^2 \psi}{dx^2} + vD \frac{(K_\infty - 1)}{L_2} \psi = -\lambda \psi$$

Entonces

$$\nu D \frac{d^2 \psi}{dx^2} + \frac{\nu D}{L_2} (K_\infty - 1) \psi + \lambda \psi = 0$$

Entonces

$$\frac{d^2 \psi}{dx^2} + \left[\frac{(K_\infty - 1)}{L_2} + \frac{\lambda}{\nu D} \right] \psi = 0 \quad (5.29)$$

Definiendo

$$B^2 \equiv \frac{(K_\infty - 1)}{L_2} + \frac{\lambda}{\nu D} \quad (5.30)$$

Obtenemos

$$\frac{d^2 \psi}{dx^2} + B^2 \psi = 0 \quad (5.31)$$

Cuya solución general es

$$\psi = A \cos(Bx) + C \operatorname{sen}(Bx) \quad (5.32)$$

Aplicando las condiciones de frontera

$$\psi \left(\pm \frac{a}{2} \right) = 0 \quad \psi(0) = \text{constante}$$

El hecho de que la corriente se anule en el centro de la placa implica que ψ debe ser una función par, así

$$\psi = A \cos(Bx) \quad (5.33)$$

Aplicando la C.F. $\psi \left(\frac{a}{2} \right) = 0$

$$\psi \left(\frac{a}{2} \right) = A \cos \left(B \frac{a}{2} \right) = 0$$

Entonces,

$$B \frac{a}{2} = n \frac{\pi}{2} \quad n = 1, 3, 5, \dots$$

Así se obtiene

$$B_n = n \frac{\pi}{a} \tag{5.34}$$

$$\Rightarrow B_n^2 = \left(n \frac{\pi}{a} \right)^2$$

Ya con B_n determinado se puede obtener la constante λ_n

$$B_n^2 = \frac{(K_\infty - 1)}{L_2} + \frac{\lambda_n}{vD}$$

Entonces

$$\frac{\lambda_n}{vD} = B_n^2 - \frac{(K_\infty - 1)}{L_2}$$

Entonces

$$\lambda_n = B_n^2 vD - \frac{(K_\infty - 1)}{L_2} vD \tag{5.35}$$

La solución de (5.27) es

$$T(t) = T(0) e^{-\lambda_n t} \tag{5.36}$$

$$\phi(x, t) = \sum_{n \text{ impar}} A_n e^{-\lambda_n t} \cos\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \tag{5.37}$$

Ahora, apliquemos la condición inicial,

$$\phi(x, 0) = \phi_0(x) = \sum_{n \text{ impar}} A_n \cos\left(\frac{n\pi x}{a}\right)$$

Con el fin de obtener la constante A_n apliquemos la propiedad de ortogonalidad a la función

$$\phi_0(x) = \sum_{n \text{ impar}} A_n \cos\left(\frac{n\pi x}{a}\right)$$

Haciendo el producto interior entre las funciones ϕ_0 y $\cos\left(\frac{n\pi x}{a}\right)$ tenemos que

$$\begin{aligned} \phi_0(x) \odot \cos\left(\frac{n\pi x}{a}\right) &= \left[A_1 \cos\left(\frac{\pi x}{a}\right) + A_3 \cos\left(\frac{3\pi x}{a}\right) + \dots \right] \odot \cos\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \\ &= A_1 \cos\left(\frac{\pi x}{a}\right) \odot \cos\left(\frac{n\pi x}{a}\right) + A_3 \cos\left(\frac{3\pi x}{a}\right) \odot \cos\left(\frac{n\pi x}{a}\right) + \dots + A_n \cos\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \odot \cos\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \end{aligned}$$

La anterior expresión se simplifica a:

$$\phi_0(x) \odot \cos\left(\frac{n\pi x}{a}\right) = A_n \cos\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \odot \cos\left(\frac{n\pi x}{a}\right)$$

Pero

$$\cos\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \odot \cos\left(\frac{n\pi x}{a}\right) = \int_{-a/2}^{a/2} \cos\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{n\pi x}{a}\right) dx$$

Así

$$\cos\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \odot \cos\left(\frac{n\pi x}{a}\right) = \frac{a}{2}$$

Entonces

$$\phi_0 \odot \cos\left(\frac{n\pi x}{a}\right) = A_n \frac{a}{2}$$

Entonces,

$$A_n = \frac{2}{a} \phi_0 \odot \cos\left(\frac{n\pi x}{a}\right)$$

Por lo tanto,

$$A_n = \frac{2}{a} \int_{-a/2}^{a/2} \phi_0(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{a}\right) dx$$

Finalmente

$$\phi(x, t) = \sum_{n \text{ impar}} \left[\frac{2}{a} \int_{-a/2}^{a/2} \phi_0(x') \cos(B_n x') dx' \right] e^{-\lambda_n t} \cos(B_n x) \quad (5.38)$$

Ahora, recordando que

$$\lambda_n = B_n^2 \nu D - \frac{(K_\infty - 1)}{L_2} \nu D \quad \text{y} \quad B_n = \frac{n\delta}{a}$$

Note que

$$B_1^2 < B_3^2 < \dots < B_n^2$$

Entonces

$$\lambda_1 < \lambda_3 < \lambda_5 < \lambda_7 < \dots$$

Por lo que mientras $t \rightarrow \infty$ los armónicos superiores decaen más fuerte que el armónico fundamental. Así la función

$$\phi(x, t) = A_1 e^{-\lambda_1 t} \cos(B_1 x) + \sum_{n=3 \text{ impar}}^{\infty} A_n e^{-\lambda_n t} \cos(B_n x)$$

Es adecuadamente representada por

$$\phi(x, t) = A_1 e^{-\lambda_1 t} \cos(B_1 x) \quad (5.39)$$

donde

$$B_1 = \frac{\delta}{a}$$

Entonces

$$B_1^2 = \left(\frac{\pi}{a}\right)^2 \equiv \text{buckling geométrico (pandeo)}$$

El pandeo también se denota con

$$B_g^2 = \left(\frac{\pi}{a}\right)^2$$

Ya que

$$B_n^2 = -\frac{1}{\psi_n} \frac{d^2 \psi_n}{dx^2}$$

El buckling mide que tanto se «pandea» o se curva el flujo.

Hagamos ahora la siguiente definición.

Criticidad \equiv Cuando un flujo de neutrones independiente del tiempo puede sostenerse en el reactor (en ausencia de fuentes diferentes a la fisión).

Entonces un flujo independiente del tiempo $\Rightarrow \lambda_1 = 0$

$$\lambda_1 = B_1^2 \nu D - \frac{(K_\infty - 1)}{L_2} \nu D = 0$$

Entonces

$$B_1 = \frac{(K_\infty - 1)}{L_2}$$

Se acostumbra referirse a

$$\frac{(K_\infty - 1)}{L_2} \equiv B_m^2 \equiv \text{buckling material}$$

Así

$$B_1^2 = B_m^2$$

O también

$$B_g^2 = B_m^2 \quad (5.40)$$

Es la condición para que un reactor sea crítico.

En consecuencia, para conseguir que un reactor sea crítico, se deben ajustar las dimensiones (B_g^2) o la composición del núcleo (B_m^2) de tal forma que $B_m^2 = B_g^2$.

Ya que

$$\lambda_1 = B_g^2 \nu D - \nu D B_m^2 \quad (5.41)$$

Note que

$$B_m^2 > B_g^2 \Rightarrow \lambda_1 < 0 \Rightarrow \text{reactor supercrítico}$$

$$B_m^2 = B_g^2 \Rightarrow \lambda_1 = 0 \Rightarrow \text{reactor crítico}$$

$$B_m^2 < B_g^2 \Rightarrow \lambda_1 > 0 \Rightarrow \text{reactor subcrítico}$$

5.5. La ecuación del reactor

En la teoría de un grupo el término de fuente de neutrones está representado por

$$S = K_\infty \Sigma_a \phi \quad (5.42)$$

Por lo tanto, la ecuación de difusión de estado no estacionario queda en la forma

$$D \nabla^2 \phi - \Sigma_a \phi + K_\infty \Sigma_a \phi = \frac{1}{\nu} \frac{\partial \phi}{\partial t} \quad (5.43)$$

Se dice que un reactor nuclear es crítico cuando el flujo de neutrones es independiente del tiempo. Entonces la ecuación de difusión para un reactor crítico es

$$D \nabla^2 \phi - \Sigma_a \phi + K_\infty \Sigma_a \phi = 0 \quad (5.44)$$

$$\nabla^2 \phi - \frac{\Sigma_a}{D} \phi + K_\infty \frac{\Sigma_a}{D} \phi = 0 \quad (5.45)$$

$$\nabla^2 \phi + B^2 \phi = 0 \quad (5.46)$$

donde

$$L^2 = \frac{D}{\Sigma_a} \quad \text{y} \quad B^2 = \frac{(K_\infty - 1)}{L^2}$$

La ecuación (5.46) es llamada la **ecuación del reactor** para la geometría más general.

Se ha establecido la condición de criticidad en un reactor nuclear como la igualdad entre el buckling geométrico y el buckling material.

$$B_g^2 = B_m^2$$

en donde el buckling geométrico es el menor de los eigenvalores de la ecuación (5.46):

$$\nabla^2 \phi + B^2 \phi = 0$$

y el buckling material está dado por $B_m = (K_\infty - 1)/L^2$. Es por lo tanto pertinente el cálculo del buckling geométrico en las geometrías básicas.

5.6. Reactor homogéneo, desnudo y de forma de paralelepípedo rectangular

Consideremos un paralelepípedo rectangular de lados extrapolados a , b y c como se muestra en la figura (5.1).

La ecuación de difusión para este sistema es de la forma

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} + B^2 \phi = 0 \quad (5.47)$$

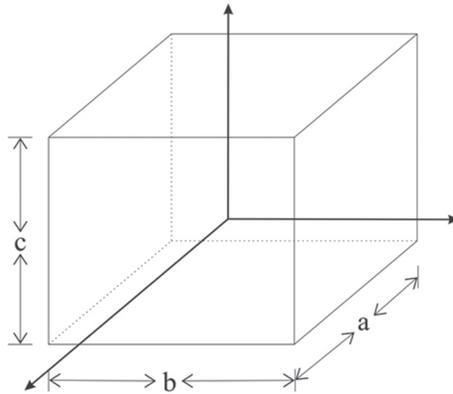


Figura 5.1. Reactor en forma de paralelepípedo.

Y puesto que el flujo debe desaparecer en cualquier punto sobre las superficies extrapoladas, las condiciones de frontera son

$$\phi\left(\pm\frac{a}{2}, y, z\right) = \phi\left(x, \pm\frac{b}{2}, z\right) = \phi\left(x, y, \pm\frac{c}{2}\right) = 0$$

Suponiendo una solución de la forma

$$\phi(x, y, z) = X(x)Y(y)Z(z) \quad (5.48)$$

Donde X , Y y Z son funciones de una variable espacial.

Ahora, sustituyendo la ecuación (5.48) en la (5.47) da

$$YZ \frac{d^2X}{dx^2} + XZ \frac{d^2Y}{dy^2} + XY \frac{d^2Z}{dz^2} + B^2 XYZ = 0 \quad (5.49)$$

Dividiendo entre XYZ

$$\frac{1}{X} \frac{d^2X}{dx^2} + \frac{1}{Y} \frac{d^2Y}{dy^2} + \frac{1}{Z} \frac{d^2Z}{dz^2} + B^2 = 0 \quad (5.50)$$

O bien

$$\frac{1}{X} \frac{d^2X}{dx^2} + \frac{1}{Y} \frac{d^2Y}{dy^2} + \frac{1}{Z} \frac{d^2Z}{dz^2} = -B^2 \quad (5.51)$$

Cada término en el lado izquierdo de la ecuación (5.51) es una función de una variable diferente. La única forma en que los tres términos sean iguales a la constante $-B^2$ es que cada término sea igual a una constante. Así

$$\frac{1}{X} \frac{d^2 X}{dx^2} = -\alpha^2 \quad (5.52)$$

$$\frac{1}{Y} \frac{d^2 Y}{dy^2} = -\beta^2 \quad (5.53)$$

$$\frac{1}{Z} \frac{d^2 Z}{dz^2} = -\gamma^2 \quad (5.54)$$

Con lo que será

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = B^2$$

Considerando la ecuación (5.52)

$$\frac{d^2 X}{dx^2} + \alpha^2 X = 0$$

La solución general de esta ecuación es

$$X(x) = A \cos(\alpha x) + C \operatorname{sen}(\alpha x)$$

Las condiciones de frontera son:

(1) El flujo es cero en las fronteras extrapoladas, es decir,

$$\phi\left(\pm \frac{a}{2}, y, z\right) = X\left(\pm \frac{a}{2}\right) Y(y) Z(z) = 0$$

$$\Rightarrow X\left(\pm \frac{a}{2}\right) = 0 \quad \forall y, z$$

(2) El flujo es simétrico y finito alrededor del origen.

Cuando

$$x = 0, \quad \frac{\partial \bar{X}}{\partial x} = 0$$

$$X(-x) = X(x) \quad (\text{función par})$$

Nota: Esto es válido ya que el sistema de coordenadas está en el centro del paralelepípedo y las fuentes están distribuidas uniformemente.

Tomando el segundo requerimiento, $C = 0$, ya que la función seno es impar

$$\Rightarrow X(x) = A \cos(\alpha x)$$

En este caso es indistinto aplicar cualquiera de las condiciones en

(1) Debido a la naturaleza de nuestro problema. Procediendo

$$X\left(\frac{a}{2}\right) = A \cos\left(\alpha \frac{a}{2}\right) = 0$$

Para que la solución sea la no trivial, $A \neq 0$, debiéndose anular el coseno

$$\cos\left(\alpha \frac{a}{2}\right) = 0$$

Entonces,

$$\frac{\alpha a}{2} = \frac{\ell \pi}{2}, \quad \ell = 1, 3, 5, \dots$$

$$\alpha = \frac{\ell \pi}{a}$$

$$\alpha^2 = \left(\frac{\ell \pi}{a}\right)^2$$

Por lo tanto, hay un conjunto infinito de funciones satisfaciendo a la ecuación (5.52) de la forma

$$X_\ell(x) = A_\ell \cos\left(\frac{\ell\pi x}{a}\right), \quad \ell = 1, 3, 5, \dots$$

Exactamente el mismo tratamiento para las ecuaciones (5.53) y (5.54) conduce a

$$Y_m(y) = A'_m \cos\left(\frac{m\pi}{b}y\right)$$

$$Z_n(z) = A''_n \cos\left(\frac{n\pi}{c}z\right)$$

$$B^2 = \left(\frac{m\pi}{b}\right)^2$$

$$\gamma^2 = \left(\frac{n\pi}{c}\right)^2$$

De la ecuación (5.48) el flujo es

$$\phi(x, y, z) = A_{\ell mn} \cos\left(\frac{\ell\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{m\pi y}{b}\right) \cos\left(\frac{n\pi z}{c}\right)$$

y

$$B_{\ell mn}^2 = \left(\frac{\ell\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{m\pi}{b}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{c}\right)^2$$

donde $A_{111} = A_1 A'_1 A''_1$. La función con el índice más bajo, esto es, $l = m = n = 1$, es la fundamental y las otras funciones son los armónicos superiores. Con el reactor crítico, la única función que prevalece es la fundamental y el flujo se reduce a

$$\phi(x, y, z) = A \cos\left(\frac{\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{\pi y}{b}\right) \cos\left(\frac{\pi z}{c}\right)$$

El buckling del sistema, el cual es el menor de los eigenvalores de B_{lmn}^2 , es entonces

$$B_{111}^2 = \left(\frac{\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{\pi}{b}\right)^2 + \left(\frac{\pi}{c}\right)^2$$

La constante A en la expresión para el flujo de neutrones se encuentra en la base a la potencia del reactor

$$P = E_R \int_V \Sigma_F \phi \, dv$$

donde E_R es la energía recuperable por fisión en Joules por fisión.

Sustituyendo la expresión para ϕ :

$$P = E_R \Sigma_F \int_V A \cos\left(\frac{\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{\pi y}{b}\right) \cos\left(\frac{\pi z}{c}\right) dx dy dz$$

haciendo

$$u = \frac{\pi x}{a} \quad du = \frac{\pi}{a} dx \quad dx = \frac{a}{\pi} du$$

$$v = \frac{\pi y}{b} \quad dv = \frac{\pi}{b} dy \quad dy = \frac{b}{\pi} dv$$

$$w = \frac{\pi z}{c} \quad dw = \frac{\pi}{c} dz \quad dz = \frac{c}{\pi} dw$$

Entonces

$$P = E_R \Sigma_F A \left(\frac{a}{\pi}\right) \left(\frac{b}{\pi}\right) \left(\frac{c}{\pi}\right) \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos(u) \cos(v) \cos(w) \, du dv dw$$

Integrando respecto a u :

$$P = E_R \Sigma_F A \left(\frac{a}{\pi}\right) \left(\frac{b}{\pi}\right) \left(\frac{c}{\pi}\right) 8$$

$$\Rightarrow A = \frac{P}{E_R \Sigma_F \frac{abc}{\pi} 8} = \frac{P \pi^3}{8 E_R \Sigma_F abc} = \frac{P \pi^3}{8 E_R \Sigma_F V}$$

Finalmente la expresión para el flujo en el reactor en forma de paralelepípedo es

$$\phi(x, y, z) = \frac{P \pi^3}{8 E_R \Sigma_F V} \cos\left(\frac{\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{\pi y}{b}\right) \cos\left(\frac{\pi z}{c}\right)$$

Flujo máximo

En un reactor geoméricamente simétrico, descubierto y con fuentes uniformemente distribuidas, el valor máximo del flujo se encuentra siempre en el centro del reactor.

$$\phi_{MAX} = \lim_{\xi_i \rightarrow 0} \phi$$

donde ξ_i es cualquier coordenada espacial de las que depende ϕ .

Flujo promedio

El valor promedio de ϕ está dado por

$$\phi_{AV} = \frac{\int \phi dV}{\int dV}$$

$$\phi_{AV} = \frac{1}{V} \int \phi dV$$

El cociente entre ϕ_{MAX} y ϕ_{AV}

Un parámetro que mide que tanto se excede el flujo (o la potencia).

En el centro de un reactor del flujo promedio, se designa por Ω y está dado por

$$\Omega = \frac{\phi_{MAX}}{\phi_{AV}}$$

En el caso del reactor en forma de paralelepípedo

$$\phi_{MAX} = \lim_{x \rightarrow 0, y \rightarrow 0, z \rightarrow 0} \phi$$

$$\phi_{MAX} = \frac{P\pi^3}{8E_R \Sigma_F V} = \mathcal{A}$$

$$\phi_{AV} = \frac{1}{V} \int \phi dV$$

$$\phi_{AV} = \frac{1}{V} \int_V A \cos\left(\frac{\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{\pi y}{b}\right) \cos\left(\frac{\pi z}{c}\right) dV$$

$$\phi_{AV} = \left(\frac{1}{V}\right) 8A \frac{abc}{\pi^3} = \frac{8A}{\pi^3}$$

$$\Omega = \frac{\phi_{MAX}}{\phi_{AV}} = \frac{A}{\frac{8A}{\pi^3}} = \frac{\pi^3}{8}$$

$$\Omega = 3.8758$$

de donde se observa que la potencia en el centro de éste reactor es casi cuatro veces la potencia promedio, lo cual es muy inconveniente.

5.7. La ecuación crítica para un grupo de energía

La condición que debe cumplir un reactor para que sea crítico es,

$$B_g^2 = B_m^2$$

Esto es que,

$$B^2 = \frac{K_\infty - 1}{L^2}$$

Esta ecuación es válida únicamente en la teoría de un grupo y puede ser reorganizada para ponerla en la forma,

$$\frac{K_\infty}{B^2 L^{2+1}} = 1$$

Esta ecuación es conocida como la ecuación crítica y simplemente es otra forma de expresar la igualdad entre el buckling geométrico y el material. Veamos ahora el significado de la ecuación crítica. Para esto, consideramos un reactor de geometría arbitraria.

El número de neutrones absorbidos en este reactor es

$$\text{Número de neutrones absorbidos por segundo en el reactor} = \sum_a \int_V \phi dV$$

y

Número de neutrones escapando por segundo desde la superficie del reactor

$$= \int_A \vec{j} \cdot \hat{n} dA = \int_V \nabla \cdot \vec{j} dV = -D \int_V \nabla^2 \phi dV$$

En donde \vec{j} es el vector de densidad de corriente de neutrones en la superficie del reactor y \hat{n} es el vector unitario normal a la superficie del reactor.

Pero ya que

$$\nabla^2 \phi + B^2 \phi = 0$$

Entonces,

$$\nabla^2 \phi = -B^2 \phi$$

Por lo tanto, el

Número de neutrones escapando por segundo desde la superficie del reactor

$$= -D \int_V (-B^2 \phi) dV = DB^2 \int_V \phi dV$$

El número total de neutrones producidos en un reactor finito es igual al número de neutrones que son absorbidos en el reactor más el número de neutrones que escapan de él. Por lo tanto la probabilidad de que un neutrón sea absorbido, esto es, de que no escapará es igual a

P_{NL} = probabilidad de que un neutrón sea absorbido

= probabilidad de que un neutrón no escape

$$= \frac{\text{número de neutrones absorbidos por segundo en el reactor}}{\text{número de neutrones en total que son producidos en el reactor}}$$

$$\Rightarrow P_{NL} = \frac{\Sigma_a \int_V \phi dV}{\Sigma_a \int_V \phi dV + DB^2 \int_V \phi dV} = \frac{\Sigma_a}{\Sigma_a + DB^2}$$

dividiendo entre Σ_a

$$P_{NL} = \frac{1}{1 + \frac{DB^2}{\Sigma_a}} = \frac{1}{1 + L^2 B^2}$$

en donde por B^2 debe tomarse el cuadrado del eigenvalor más bajo al resolver la ecuación del reactor.

Por lo tanto la ecuación crítica para un grupo de energía se convierte en

$$K_\infty P_{NL} = 1$$

Calculemos ahora el factor de multiplicación efectivo o factor de multiplicación del reactor, para lo cual nos auxiliaremos con el diagrama que se muestra en la figura (5.2).

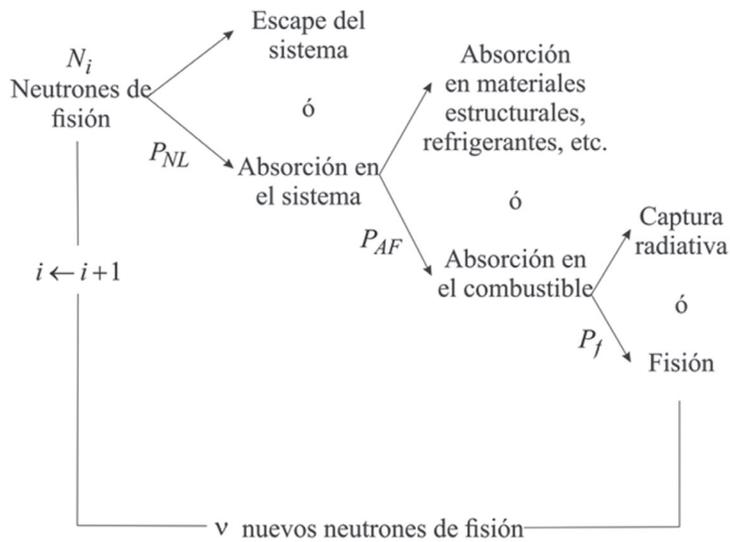


Figura 5.2. Eventos en un reactor considerando un grupo de energía.

Para hacer esto más formal, definimos las probabilidades de cada uno de los eventos como sigue:

$P_{NL} \equiv$ Probabilidad de que un neutrón no escapará del sistema.

$P_{AF} \equiv$ Probabilidad condicional de que si un neutrón es absorbido, él será absorbido en el combustible.

$P_f \equiv$ Probabilidad condicional de que si el neutrón es absorbido en el combustible, el inducirá una reacción de fisión.

Las expresiones para estas dos últimas probabilidades en un reactor homogéneo son,

$$P_{AF} = \frac{\Sigma_{AF}}{\Sigma_{AF} + \Sigma_{aM}}$$

Que como se vio anteriormente, es igual a la utilización del combustible $P_{AF} \equiv f$.

Ahora, la probabilidad para inducir una reacción de fisión en el combustible puede expresarse también en términos de las secciones eficaces.

$$P_f = \frac{\Sigma_f}{\Sigma_a} = \frac{\sigma_f}{\sigma_a}$$

Ahora, utilizaremos estas probabilidades para determinar el factor de multiplicación efectivo K_{eff} . Suponiendo que empezamos con N_1 neutrones en el reactor en una generación dada. Entonces, con la ayuda de las probabilidades anteriores y de nuestro diagrama, podemos calcular el número de neutrones en la generación siguiente como:

$$N_2 = \nu P_f P_{NL} N_1$$

$$N_2 = \nu \frac{\sigma_f}{\sigma_a} P_{NL} N_1$$

$$N_2 = \eta f P_{NL} N_1$$

En donde

$$\eta = \nu \frac{\sigma_f}{\sigma_a}$$

Ya que el factor de multiplicación es el cociente entre dos generaciones sucesivas de neutrones,

$$K_{eff} = K = \frac{N_2}{N_1}$$

$$K = \frac{\eta f P_{NL} N_1}{N_1}$$

$$K = \eta f P_{NL}$$

$$K = K_{\infty} P_{NL}$$

En donde

$$K_{\infty} = \eta f$$

En conclusión: la ecuación crítica de un grupo es un caso particular de la fórmula para el factor de multiplicación del reactor y se obtiene cuando $K = 1$, es decir, cuando el reactor finito es crítico.

5.8. Reactores térmicos

La fórmula de los cuatro factores.

Un reactor se denomina térmico debido a que la reacción en cadena es inducida con neutrones lentos o térmicos.

Debido a que los neutrones de fisión «nacen» rápidos, es necesario contar con un material que desacelere o modere los neutrones en este tipo de reactor. Durante la moderación de los neutrones hasta energías térmicas pueden ocurrir algunos eventos que no fueron tomados en cuenta en el cálculo con un grupo de energía. Estos eventos son el de absorción debido a las resonancias, la cual ocurre en reactores que contengan isótopos tales como el U-238 y las fisiones que se puedan originar debido a los neutrones rápidos tanto en los núcleos físis como fisionables.

Los procesos que caracterizan a una generación de neutrones en un reactor térmico se representan en el esquema de la figura (5.3).

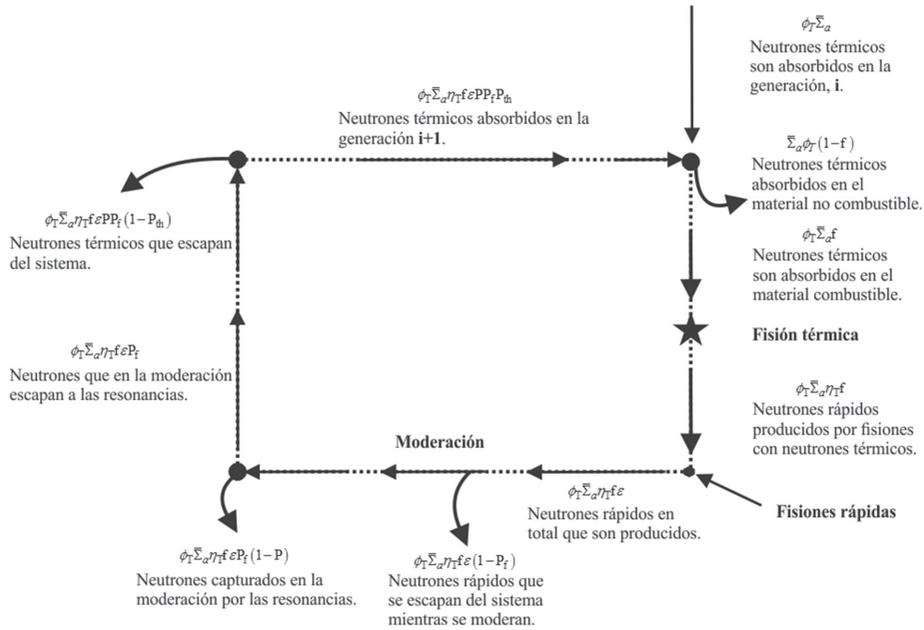


Figura 5.3. Eventos en un reactor térmico.

Para calcular el factor de multiplicación efectivo de un reactor térmico es necesario hacer las siguientes definiciones.

ν \equiv Número promedio de neutrones producidos por reacción de fisión.

η_T \equiv Número promedio de neutrones producidos por neutrón térmico absorbido en el combustible.

f \equiv Probabilidad de que la absorción de un neutrón térmico se llevará a cabo en el combustible.

P_{th} \equiv Probabilidad de que un neutrón térmico sea absorbido en el sistema (no escape del sistema).

P \equiv Probabilidad de que un neutrón no sea absorbido durante la moderación (probabilidad de escape a la resonancia).

P_f \equiv Probabilidad de que un neutrón durante su moderación (neutrón rápido) no escape del sistema.

ε \equiv Cociente entre el número total de neutrones producidos y el número de neutrones producidos en las reacciones con neutrones lentos (factor de fisión rápida).

Usando estas definiciones es posible construir una descripción gráfica de la multiplicación de neutrones en un reactor térmico.

Con ayuda de nuestro diagrama y de acuerdo con la definición de factor de multiplicación del reactor:

$$K_{eff} = K = \frac{\phi_T \bar{\Sigma}_a \eta_T \varepsilon P P_f P_{tb}}{\phi_T \bar{\Sigma}_a}$$

Entonces

$$K_{eff} = \phi_T \bar{\Sigma}_a \eta_T \varepsilon P P_f P_{tb}$$

La cual es conocida como la fórmula de los seis factores.

Si nuestro reactor térmico se supone infinito, las probabilidades de no escape son iguales a uno, es decir, $P_f = 1$ y $P_{tb} = 1$

Entonces

$$K_{\infty} = \eta_T f \varepsilon P$$

donde el subíndice en K significa que es el factor de multiplicación para un reactor infinito. Esta última ecuación es conocida como la fórmula de los cuatro factores.

En teoría de dos grupos el flujo rápido es descrito por:

$$D_1 \nabla^2 \phi_1 - \Sigma_1 \phi_1 + S = 0$$

$$\Sigma_{a1} = 0$$

$$D_1 \nabla^2 \phi_1 - \Sigma_1 \phi_1 + \phi_T \bar{\Sigma}_a \eta_T f \varepsilon = 0$$

$$\nabla^2 \phi_1 - \frac{\Sigma_1}{D_1} \phi_1 + \frac{\phi_T \bar{\Sigma}_a \eta_T f \varepsilon}{D_1} = 0 \quad (I)$$

En forma similar una ecuación de difusión para los neutrones térmicos puede escribirse como

$$\nabla^2 \phi_T - \frac{\bar{\Sigma}_1}{D} \phi_T + \frac{P \Sigma_1 \phi_1}{D} = 0 \quad (II)$$

Tomando el flujo rápido de la misma forma que el flujo térmico, es decir, difiriendo únicamente en magnitud, podemos plantear las ecuaciones del reactor para los dos flujos como:

$$\nabla^2 \phi_T + B^2 \phi_T = 0 \quad (III)$$

$$\nabla^2 \phi_1 + B^2 \phi_1 = 0 \quad (IV)$$

Comparando (III) con (II) y (IV) con (I), se observa que

$$B^2 \phi_T = -\frac{\phi_T}{L_T^2} + \frac{P \Sigma_1 \phi_1}{D} \quad (V)$$

$$B^2 \phi_1 = -\frac{\phi_1}{\zeta_T} + \frac{\eta_T f \varepsilon \bar{\Sigma}_a \phi_T}{D_1} \quad (VI)$$

Resolviendo (VI) para el flujo en el grupo 1 (rápido), ϕ_1 ,

$$B^2 \phi_1 + \frac{\phi_1}{\zeta_T} = + \frac{\eta_T f \varepsilon \bar{\Sigma}_a \phi_T}{D_1}$$

$$\phi_1 \left(B^2 + \frac{1}{\zeta_T} \right) = \frac{\eta_T f \varepsilon \bar{\Sigma}_a \phi_T}{D_1}$$

$$\phi_1 = \frac{\eta_T \zeta_T f \varepsilon \bar{\Sigma}_a \phi_T}{(B^2 \zeta_T + 1) D_1} \quad (VII)$$

Sustituyendo (VII) dentro de (V)

$$B^2 \phi_T + \frac{\phi_T}{L_T^2} = \frac{P \Sigma_1}{D} \left(\frac{\eta_T \zeta_T f \varepsilon \bar{\Sigma}_a \phi_T}{(B^2 \zeta_T + 1) D_1} \right)$$

$$\phi_T \left(B^2 + \frac{1}{L_T^2} \right) = \frac{P \Sigma_1 \eta_T \zeta_T f \varepsilon \bar{\Sigma}_a \phi_T}{(B^2 \zeta_T + 1) D_1 \bar{D}}$$

$$(B^2 \zeta_T + 1)(B^2 L_T^2 + 1) = \frac{P \Sigma_1 \eta_T \zeta_T L_T^2 f \varepsilon \bar{\Sigma}_a}{D_1 \bar{D}}$$

$$= K_\infty$$

Entonces

$$(B^2 \zeta_T + 1)(B^2 L_T^2 + 1) = K_\infty$$

Por lo tanto

$$\frac{K_\infty}{(B^2 \zeta_T + 1)(B^2 L_T^2 + 1)} = 1$$

Esta última ecuación es conocida como la ecuación crítica para dos grupos.

Ahora, ya que

$$P_{tb} = \frac{1}{B^2 L_T^2 + 1} \quad \text{y} \quad P_f = \frac{1}{B^2 \zeta_T + 1}$$

Entonces la ecuación crítica para dos grupos queda en la forma:

$$K_\infty P_{tb} P_f = 1$$

Comparando la ecuación anterior con la fórmula para los seis factores,

$$K_{eff} = K_\infty P_{tb} P_f$$

Por lo tanto, la ecuación crítica para dos grupos se obtiene haciendo $K_{eff} = 1$

Desarrollando el denominador de la ecuación crítica de dos grupos

$$\frac{K_\infty}{B^4 \zeta_T L_T^2 + B^2 \zeta_T + B^2 L_T^2 + 1} = 1$$

Para grandes factores el buckling es pequeño y por lo tanto $B^4 L_T^2 \zeta_T$ es mucho menor y puede ser ignorado, así

$$\frac{K_\infty}{B^2(\zeta_T + L_T^2) + 1} = 1$$

La suma del cuadrado de la longitud de difusión térmica y la edad del neutrón es denotada por M_T^2 ,

$$M_T^2 = \zeta_T + L_T^2$$

Entonces la ecuación crítica para dos grupos de energía queda en la forma

$$\frac{K_\infty}{B^2(M_T^2) + 1} = 1$$

esta ecuación es conocida como la ecuación crítica modificada de un grupo.

5.9. Aplicaciones

5.9.1. Ejemplo 1

Considere un reactor crítico desnudo en forma de placa de 200 cm de espesor consistiendo de una mezcla homogénea de U-235 y grafito. El flujo térmico máximo es 5×10^{12} neutrones/cm²s. Usando la teoría modificada de un grupo, calcule:

(a) El pandeo del reactor; (b) la concentración atómica crítica de uranio; (c) el área de difusión térmica; (d) el valor de K; (e) el flujo térmico y la corriente a través de la placa; (f) la potencia térmica producida por cm² de esta placa.

(a)

$$B^2 = \left(\frac{\pi}{a}\right)^2$$

Entonces

$$B^2 = \left(\frac{\pi}{200}\right)^2 = 0.00025$$

(b) A temperatura ambiente:

$$L_{TM}^2 = 3500 \text{ cm}^2, \quad \zeta_T = 368 \text{ cm}^2, \quad \eta_T = 2.965$$

$$Z = \frac{1 + B^2 (L_{TM}^2 + \zeta_{TM})}{\eta_T - 1 - B^2 \zeta_{TM}} = \frac{1 + 0.00025(3500 + 368)}{2.065 - 1 - 0.00025 \times 358}$$

$$Z = 2.02158$$

$$\sigma_{aM}(E_0) = 0.0034 \text{ b}, \quad \sigma_{af}(E_0) = 681 \text{ b}, \quad g_a(20^\circ \text{C}) = 0.9780$$

$$m_f = Z \frac{\sigma_{aM}(E_0) M_F \rho_M V_{reactor}}{g_{aF}(T) \sigma_{aF}(E_0) M_M}$$

$$N_F = Z \frac{\sigma_{aM}(E_0) M_F \rho_M V_{reactor}}{g_{aF}(T) \sigma_{aF}(E_0) M_M} \times \frac{N_A}{V_{reactor} M_F}$$

$$N_F = Z \frac{\sigma_{aM}(E_0) \rho_M N_A}{g_{aF}(T) \sigma_{aF}(E_0) M_M}$$

$$N_F = 2.02158 \times \frac{0.0034 \times 1.6 \times 6.02 \times 10^{23}}{0.978 \times 681 \times 12.01115}$$

$$N_F = 8.276 \times 10^{17} \text{ átomos de U-235 / cm}^3$$

(c)

$$f = \frac{Z}{Z+1} = \frac{2.02158}{3.02158} = 0.66905$$

$$L_T^2 = (1-f) L_{TM}^2 = (1-0.66905) 3500 \text{ cm}^2$$

$$L_T^2 = 1158.325 \text{ cm}^2$$

(d)

$$K_\infty = \eta_T f$$

$$K_\infty = 2.065 \times 0.66905 = 1.38159$$

(e)

$$\phi = A \cos\left(\frac{\pi x}{a}\right)$$

$$\phi_{MAX} = \lim_{x \rightarrow 0} A \cos\left(\frac{\pi x}{a}\right) = A = 5 \times 10^2 \frac{n's}{cm^2_s}$$

$$\phi_{MAX} = 5 \times 10^2 \cos\left(\frac{\pi x}{a}\right) \frac{n's}{cm^2_s}$$

$$\bar{J} = -\bar{D} \frac{d\phi}{dx} \hat{i} = -\bar{D} \left[-5 \times 10^{12} \left(\frac{\pi}{a}\right) \text{sen}\left(\frac{\pi x}{a}\right) \right] \hat{i}$$

$$\bar{J} = 0.84 \times \frac{\pi}{200} 5 \times 10^{12} \text{sen}\left(\frac{\pi x}{a}\right) \hat{i} \frac{n's}{cm^2_s}$$

$$\bar{J} = 6.597 \times 10^{10} \text{sen}\left(\frac{\pi x}{a}\right) \hat{i}$$

(f)

$$P = E_R \sum_f \int_{-a/2}^{a/2} \phi(x) dx = E_R \sum_f \int_{-a/2}^{a/2} A \cos\left(\frac{\pi x}{a}\right) dx$$

$$P = \frac{2aAE_R \sum_f}{\pi}$$

$$P = \frac{2 \times 200 \times 3.2 \times 10^{-11} \times 5 \times 10^{12} \times 8.27 \times 10^{17} \times 0.886 \times 0.9759 \times 582.2}{\pi}$$

$$P = 8.4871 \text{Watt} / \text{cm}^2$$

5.9.2. Ejemplo 2

Un reactor esférico descubierto de 50 cm de radio está compuesto de una mezcla homogénea de U-235 y berilio. El reactor opera a un nivel de potencia de 50 kW térmicos. Usando teoría modificada de un grupo, calcule:

(a) La masa crítica de U-235; (b) el flujo térmico a través del reactor; (c) el escape de neutrones desde el reactor; (d) la razón de consumo de U-235.

(a)

$$B^2 = \left(\frac{\pi}{R} \right)^2 = 3.9478 \times 10^{-3} \text{ cm}^{-2}$$

$$Z = \frac{1 + B^2 (L_{TM} + \zeta_{TM})}{\eta_T - 1 - B^2 \zeta_{TM}} = \frac{1 + (3.4478 \times 10^{-2})(480 + 102)}{2.065 - 1 - (3.9478 \times 10^{-3})102 \text{ cm}^2}$$

$$Z = 4.9788$$

$$\sigma_{aM}(E_0) = 0.0092b$$

$$\sigma_{aF}(E_0) = 6.81b$$

$$g_{aF}(E_0) = 0.978$$

$$M_M = 9$$

$$m_M = \frac{4}{3} \pi R^2 \rho_M = \frac{4}{3} \pi (50^3)(1.85) = 9.6865 \times 10^5$$

$$m_F = Z \frac{\sigma_{aM}(E_0) M_F m_M}{g_{aF}(T) \sigma_{aF}(E_0) M_M} = \frac{4.978 \times 0.00092 \times 235 \times 9.6865 \times 10^5}{0.978 \times 681 \times 9}$$

$$= 1739.5g$$

(b)

$$\phi = A \frac{\text{sen}(Br)}{r}$$

$$P = 50 \text{ kW} = 5 \times 10^4 \frac{\text{J}}{\text{s}}, \quad R = 50 \text{ cm}, \quad E_R = 3.2 \times 10^{-11} \text{ J}$$

$$N_F = \frac{m_f N_A}{VM_F} = \frac{(1739.5)(6.02217 \times 10^{23} \text{ átomos / mol})}{\left(\frac{4}{3}\pi(50\text{cm})^3 \times 235\text{g / mol}\right)}$$

$$= 8.5136 \times 10^{18} \text{ átomos / cm}^3$$

$$\bar{\sigma}_f = 0.886\text{g}_{fF}(T), \sigma_f(E_0) = 0.886 \times 0.976 \times 582 \times 10^{-24} \text{ cm}^2$$

$$\bar{\sigma}_f = 5.03276 \times 10^{-22} \text{ cm}^2$$

$$\bar{\Sigma}_f = N_f \bar{\sigma}_f = 0.0043 \text{ cm}^{-1}$$

$$A = \frac{5 \times 10^{14} \text{ J/s}}{4(50\text{cm})^2 (3.2 \times 10^{-11} \text{ J})(4.3 \times 10^{-3} \text{ cm}^{-1})}$$

$$= 3.6467 \times 10^{23} \text{ n's / cm} \cdot \text{s}$$

$$\therefore \phi_r = 3.6467 \times 10^{23} \frac{\text{sen}(3.9478 \times 10^{-3} r)}{r}$$

(c) Escape de neutrones del reactor

$$J = -D\nabla\phi$$

$$D = 0.5\text{cm}$$

$$J = \frac{-1.6734 \times 10^{23} \left\{ r(3.9478 \times 10^{-3}) \cos(3.9478 \times 10^{-3} r) - \text{sen}(3.9478 \times 10^{-3} r) \right\}}{r^2}$$

$$\text{Escapes/s} = J(r)|_{r=R} 4\pi R^2 = 4.0784 \times 10^{23} \text{ n's/s}$$

(d) La razón de consumo de U-235.

Tasa de consumo

$$\int_V \bar{\Sigma}_f \phi_r dv$$

$$\begin{aligned}
&= 4\pi \int_0^R \bar{\Sigma}_f \phi_T r^2 dr \\
&= 4\pi \int_0^R (0.0043) (3.6467 \times 10^{23}) r^2 \frac{\text{sen}(3.9478 \times 10^{-3} r)}{r} dr \\
&= 3.2287 \times 10^{24} \text{ fisiones / s}
\end{aligned}$$

5.10. Reactores con reflector

Al calcular la razón del flujo máximo al promedio en reactores descubiertos, se encontró que varía de 3.87 en el caso del paralelepípedo de 3.29 en el caso de la esfera. Lo cual indica que en el centro del reactor se produce aproximadamente de 3 a 4 veces la potencia promedio, lo que causaría serios problemas de ingeniería. Para reducir este efecto, algo de material extra se coloca alrededor del reactor. Este material tiene propiedades similares al moderador tales como baja sección eficaz de absorción y alta sección eficaz de dispersión. Este material actuará como un reflector, reduciendo el escape e incrementando la densidad de neutrones en el extremo del núcleo. Esto significa que las dimensiones críticas de un reactor se reducen puesto que el número promedio de fisiones por unidad de volumen se incrementa debido al aumento en el flujo promedio.

Veamos matemáticamente este efecto escribiendo la ecuación del reactor para el núcleo y el reflector.

Para el núcleo

$$\nabla^2 \phi_c + B_c^2 \phi_c = 0$$

donde

$$B_c^2 = \frac{K_\infty - 1}{L_c^2}$$

En el reflector puesto que no hay combustible

$$\nabla^2 \phi_r - \frac{1}{L_r^2} \phi_r = 0$$

Necesitamos un total de cuatro condiciones de frontera para resolver estas dos ecuaciones diferenciales parciales de segundo orden.

Estas son

1. En un reactor con fuentes de neutrones distribuidas uniformemente el flujo en el centro es máximo, i.e., el flujo es simétrico en el espacio.
2. El flujo en la superficie más externa debe ser cero.
3. $\phi_c = \phi_r$ en la intercara.
4. $-D_c \phi_c^1 = -D_r \phi_r^1$ en la intercara.

Como ejemplo consideremos el cálculo del flujo a través de un sistema compuesto por un cilindro infinito de radio R que está rodeado por un reflector de espesor b .

El flujo en el núcleo se determina con,

$$\nabla^2 \phi_c + B_c^2 \phi_c = 0$$

$$\phi_c = \phi_c(\theta, Z)$$

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{d\phi_c}{dr} \right) + B_c^2 \phi_c = 0$$

$$\frac{1}{r} \left(r \frac{d^2 \phi_c}{dr^2} + \frac{d\phi_c}{dr} \right) + B_c^2 \phi_c = 0$$

$$\frac{d^2 \phi_c}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\phi_c}{dr} + B_c^2 \phi_c = 0$$

Comparando con la ecuación diferencial de Bessel,

$$\frac{d^2 \phi_c}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\phi_c}{dr} + \left(\alpha^2 - \frac{n^2}{r^2} \right) \phi_c = 0$$

Cuya solución general es,

$$\phi_c = AJ_n(Xr) + CY_n(\alpha r)$$

La solución general en nuestro caso es

$$\phi_c = AJ_o(B_c r) + CY_o(B_c r)$$

Cuando $r \rightarrow 0$, $Y_o \rightarrow -\infty$ por lo que $C = 0$

$$\therefore \phi_c = AJ_o(B_c r)$$

El flujo en el reflector se encuentra con,

$$\nabla^2 \phi_r - \frac{1}{L_r^2} \phi_r = 0$$

Como el flujo solo depende del radio:

$$\phi_r = \phi_r(r)$$

Entonces

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{d\phi_r}{dr} \right) - \frac{1}{L^2} \phi_r = 0$$

$$\frac{1}{r} \left(r \frac{d^2 \phi_r}{dr^2} + \frac{d\phi_r}{dr} \right) - \frac{1}{L^2} \phi_r = 0$$

$$\frac{d^2 \phi_r}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\phi_r}{dr} - \frac{1}{L^2} \phi_r = 0$$

$$\frac{d^2 \phi_r}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\phi_r}{dr} - \left(\frac{1}{L^2} + \frac{0}{r^2} \right) \phi_r = 0$$

Entonces la solución es,

$$\phi_r = A'I_o\left(\frac{r}{L_r}\right) + C'K_o\left(\frac{r}{L_r}\right)$$

El flujo en el espesor extrapolado b del reflector es igual a cero, entonces,

$$\phi_r(b) = A'I_o\left(\frac{b}{L_r}\right) + C'K_o\left(\frac{b}{L_r}\right)$$

Entonces

$$A' = \frac{-C'K_o(b/L_r)}{I_o(b/L_r)}$$

$$\therefore \phi_r = -C' \frac{K_o(b/L_r)}{I_o(b/L_r)} I_o(r/L_r) + C'K_o(r/L_r)$$

$$\phi_r = C' \left[K_o(r/L_r) - \frac{K_o(b/L_r)}{I_o(b/L_r)} I_o(r/L_r) \right]$$

Aplicando la condición,

$$\phi_c(R) = \phi_r(R)$$

Entonces

$$AJ_o(B_c R) = C' \left[K_o(R/L_r) - \frac{K_o(b/L_r)}{I_o(b/L_r)} I_o(R/L_r) \right]$$

Aplicando la condición,

$$D_c \frac{d\phi_c}{dr} \Big|_{r=R} = D_r \frac{d\phi_r}{dr} \Big|_{r=R}$$

Sabemos que

$$\frac{dJ_o(\alpha x)}{dx} = -\alpha J(\alpha x)$$

$$\frac{dK_o(\alpha x)}{dx} = -\alpha K(\alpha x)$$

$$\frac{dI_o(\alpha x)}{dx} = -\alpha I(\alpha x)$$

Entonces,

$$D_c [-AB_c J_1(B_c R)] = D_r C' \left[-\frac{1}{L_r} K_1(R/L_r) + \frac{K_o(b/L_r)}{I_o(b/L_r)L_r} I_1(R/L_r) \right]$$

Dividiendo (II) entre (I):

$$AB_c \frac{J_1(B_c R)}{J_o(B_c R)} = \frac{D_r \left[\frac{1}{L_r} K_1(R/L_r) - \frac{K_o(b/L_r)}{I_o(b/L_r)L_r} I_1(R/L_r) \right]}{\left[K_o(R/L_r) - \frac{K_o(b/L_r)}{I_o(b/L_r)} I_o(R/L_r) \right]}$$

esta última ecuación es la condición de criticidad de nuestro sistema.

Se ha encontrado la condición para que el sistema en estudio sea crítico, sin embargo, aún no sabemos cuales son las constantes A y C' .

La constante A se procederá a encontrarla en base a la potencia del reactor,

$$P = E_R \sum_f \int_{V_c} \phi_c dv$$

$$P = E_R \sum_f \int_{V_c} A J_o(B_c r) r dr d\varphi dz$$

la potencia por unidad de longitud será,

$$P = E_R \sum_f \int_0^{2\pi} \int_0^R A J_o(B_c r) r dr d\varphi$$

$$P = E_R \sum_f 2\pi \int_0^R A J_o(B_c r) r dr$$

haciendo

$$u = B_c r, du = B_c dr \Rightarrow dr = \frac{du}{B_c}$$

cuando

$$r = 0, u = 0$$

cuando

$$r = R, u = B_c R$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned} P &= E_R \sum_f 2\pi A \int_0^{B_c R} J_0(u) \frac{u}{B_c^2} du \\ &= \frac{E_R \sum_f 2\pi A}{B_c^2} \int_0^{B_c R} u J_0(u) du \\ &= \frac{E_R \sum_f 2\pi A}{B_c^2} B_c R J_1(B_c R) \\ &= \frac{E_R \sum_f 2\pi A R J_1(B_c R)}{B_c} \\ A &= \frac{B_c P}{E_R \sum_f 2\pi R J_1(B_c R)} \end{aligned}$$

por último, la constante C' se puede determinar de la ecuación (I) ya que A sí es conocida.

$$\phi_c = A J_0(B_c r)$$

Finalmente

$$\phi_r = \frac{A J_0(B_c R)}{\left(K_o(R/L_r) - \frac{K_o(b/L_r)}{I_o(b/L_r)} I_o(R/L_r) \right)} \left[K_o(r/L_r) - \frac{K_o(b/L_r)}{I_o(b/L_r)} I_o(r/L_r) \right]$$

5.10.1. El flujo en un reactor térmico reflejado

En la teoría de dos grupos aplicada a un reactor térmico homogéneo y descubierta el flujo rápido ϕ_1 , es más grande que el flujo térmico ϕ_T , esto se puede ilustrar en la figura (5.4).

En un reactor con reflector, en un caso típico se obtiene una distribución espacial del flujo rápido y térmico como la dada en la figura siguiente,

En esta figura pueden observarse varios hechos significativos:

1. En primer lugar, la caída del flujo rápido en el reflector es muy rápida, porque el elevado poder de moderación de éste, hace que los neutrones se precipiten hacia la zona térmica de energías.
2. Aunque la densidad de neutrones térmicos en el núcleo es mayor que la de rápidos, el flujo ($\phi = mv$) es menor debido a la mayor velocidad de éstos.
3. Los neutrones rápidos escapan al reflector, donde se moderan produciéndose una acumulación de términos, como se observa en la figura y una emigración nuevamente, hacia el núcleo.

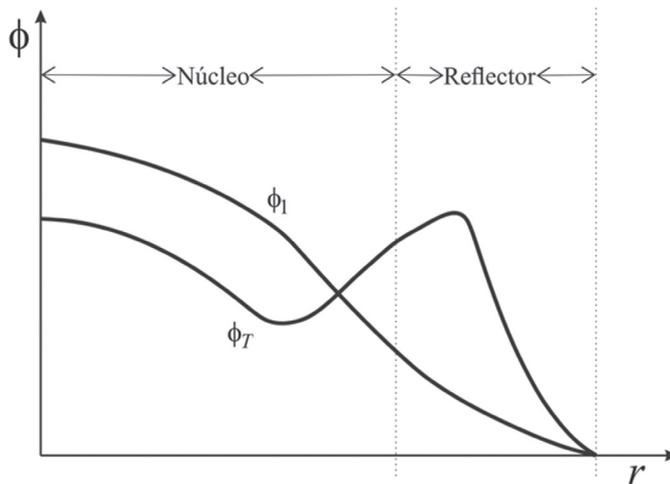


Figura 5.4. Flujo rápido y térmico en un reactor con reflector.

4. La presencia del reflector eleva el flujo en las proximidades de la interface, uniformado, en cierta medida, la distribución térmica o rápida que habría si no hubiera reflector.

5.10.2. Ahorro debido al reflector

Se define el ahorro del reflector como la diferencia entre el tamaño crítico del núcleo sin y con reflector y se denota por δ :

$$\delta = a(\text{descubierto}) - a(\text{reflejado})$$

Para un reactor en forma de placa

$$\delta = \frac{1}{2}(a_0 - a)$$

donde a_0 y a son las dimensiones críticas del reactor descubierto y del reflejado respectivamente.

Para un reactor esférico,

$$\delta = R_0 - R$$

donde R_0 y R son las dimensiones críticas del reactor descubierto y del reflejado respectivamente.

Con el fin de tener resultados cualitativos del ahorro del reflector, este se puede calcular usando

$$\delta \cong \frac{\bar{D}_c}{D_r} L_{Tr}$$

para reactores que no son moderados ni reflejados con agua ligera; para reactores moderados y reflejados con agua ligera, el ahorro del reflector se obtiene con

$$\delta = 7.2 + 0.10(M_T^2 - 40.0)$$

$$\delta [=] \text{cm} \quad \text{y} \quad M_T^2 [=] \text{cm}^2$$

5.10.3. Cálculos de multigrupos

El método de un grupo da solo las estimaciones más rudimentarias de las propiedades de un reactor crítico y para obtener resultados más exactos es necesario ejecutar cálculos de multigrupos.

El término de fuente S_g en la ecuación para el g-ésimo grupo de energía (ver sección 4.8 del capítulo 4) está compuesto de los siguientes términos:

$$S_g = \chi_g \sum_{g'=1}^N \nu_{g'1} \sum_{f\bar{g}1} \phi_{g'1} + S_g^{ext}$$

Donde χ_g es la probabilidad de que un neutrón de fisión nacirá con una energía en el grupo g , mientras que $\sum_{f\bar{g}}$ es la sección eficaz de fisión del grupo g' y $\nu_{g'}$ es el número promedio de neutrones de fisión liberados en una reacción de fisión inducida por un neutrón en el grupo g' . Introduciendo el término de fuente para el grupo g-ésimo, se obtiene la ecuación para el grupo g-ésimo en un conjunto de N ecuaciones de multigrupos:

$$\frac{1}{V_g} \frac{\partial \phi_g}{\partial t} - \nabla \cdot (D_g \nabla \phi) + \sum_{i\bar{g}} \phi(\vec{r}, t) = \sum_{g'=1}^N \sum_{s\bar{g}1} \phi_{g'1} + \chi_g \sum_{g'=1}^N \nu_{g'1} \sum_{f\bar{g}1} \phi_{g'1} + S_g^{ext}$$

Para el reactor común, que tiene varias regiones de diferentes propiedades materiales, hay un conjunto de ecuaciones como las representadas por la ecuación de arriba para cada región. En este caso es necesario resolver las ecuaciones en cada región. En este caso es necesario resolver las ecuaciones en cada región satisfaciendo las condiciones de frontera en cada intercara así como en la superficie del reactor. Este procedimiento puede solo ser llevado a cabo en forma práctica con una computadora electrónica de alta velocidad, y muchos programas de cómputo han sido escritos para resolver las ecuaciones de multigrupos.

Para un reactor infinito, los flujos son independientes de la posición, $\phi_g = \text{constante}$, $\nabla^2 \phi_g = 0$, y las ecuaciones de multigrupos se reducen a un conjunto de ecuaciones algebraicas lineales con coeficientes constantes en las incógnitas $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_N$. Puesto que estas son ecuaciones homogéneas, de acuerdo con la regla de Cramer, no hay soluciones diferentes para ϕ_1, ϕ_2, \dots ,

ϕ_N a menos que el determinante de los coeficientes de los flujos sea igual a cero, lo cual es realmente el requerimiento para la criticidad del sistema infinito. Cambiando la concentración del combustible, el valor del determinante también cambia.

La concentración para la cual el determinante es cero es la composición requerida para que el sistema sea crítico.

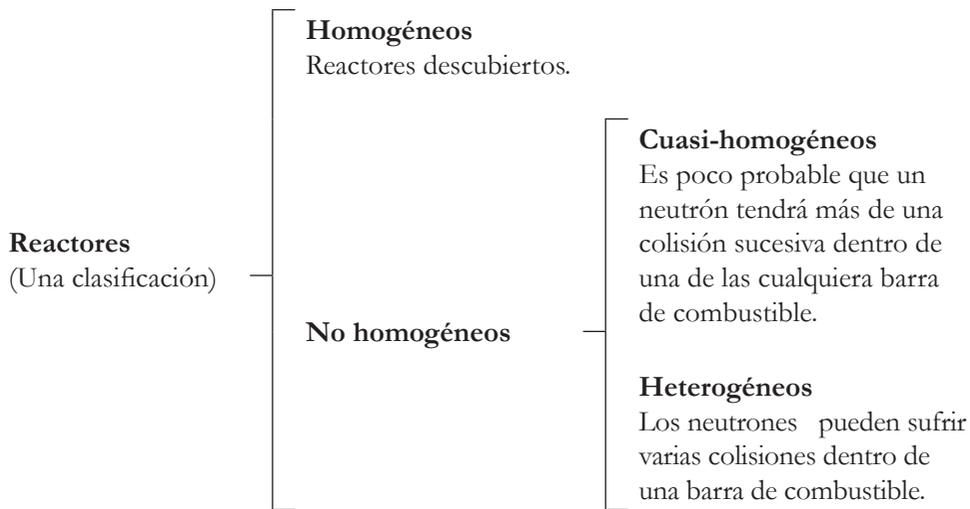
Las magnitudes relativas de los flujos $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_N$ puede encontrarse resolviendo las ecuaciones lineales de multigrupos usando valores para los coeficientes calculados en la composición crítica.

Los valores absolutos no se pueden obtener, porque esto depende del nivel de potencia del reactor.

No obstante, los valores relativos del flujo son suficientes para estimar la distribución de energía o espectro de energías de los neutrones en el reactor.

Tales cálculos del espectro de neutrones en reactores infinitos son usados en el diseño de reactores en la siguiente forma. Debido a la complejidad de las ecuaciones de multigrupos para un reactor finito, de varias regiones, el utilizar un gran número de grupos en cálculos de multigrupos es demasiado costoso por el tiempo de computadora, especialmente en las primeras etapas del diseño del reactor, cuando estos cálculos deben llevarse a cabo repetidamente con la variación de parámetros de diseño. Se ha encontrado más práctico, por lo tanto, ejecutar los cálculos de diseño iniciales para un reactor finito usando solo pocos grupos, pero con las constantes de multigrupos calculadas usando el espectro de neutrones deducido de los cálculos de multigrupos llevado a cabo con un gran número de grupos para un reactor infinito. Solo cuando el diseño de un reactor ha sido más o menos decidido, cálculos de multigrupos dependientes del espacio deben ser hechos. Esto nos proporciona estimaciones exactas de la masa crítica, flujo de neutrones, distribución de potencia y otras propiedades del sistema.

5.11. Reactores heterogéneos



5.11.1. Reactores homogéneos

Cuando el núcleo del reactor consiste de una mezcla homogénea de material físil, refrigerante y si el reactor es térmico, moderador.

Ya que en la mayoría de los reactores el combustible se encuentra contenido en barras de combustible de distintas formas. Los reactores con barras de combustible son llamados no homogéneos.

5.11.2. Reactores cuasi-homogéneos

Consisten de barras delgadas en espesor y en ellos la trayectoria libre media de los neutrones de todas las energías es mucho mayor que el espesor de las barras de combustible.

5.11.3. Reactores heterogéneos

Son la mayoría (o todos) de los reactores de potencia (térmicos) modernos, son alimentados con uranio ligeramente enriquecido y las barras de combustible no tienen un espesor delgado.

Su característica es que la trayectoria libre media de los neutrones de alguna energía es comparable o más pequeña que el espesor de una barra de combustible.

Esto hace que haya que tratar al combustible y al moderador como regiones separadas.

Los reactores cuasi-homogéneos se pueden calcular con las fórmulas desarrolladas para sistemas homogéneos. Simplemente hay que usar en los cálculos las densidades atómicas para el reactor homogéneo equivalente.

Para los reactores heterogéneos se puede usar:

$$K_{\infty} = \eta_T f P \epsilon$$

donde

$$\eta_T = \frac{\bar{\nu}_{25} \bar{\sigma}_{f25}}{\bar{\sigma}_{a25} + \frac{N_{28}}{N_{25}} \bar{\sigma}_{a28}}$$

El cálculo de la utilización térmica se basa en los flujos:

$$\bar{\phi}_{TF} = \frac{\int_{V_F} \bar{\Sigma}_{aF} \phi_T dv}{\int_{V_F} \bar{\Sigma}_{aF} dv}$$

$$\bar{\phi}_{TF} = \frac{\int_{V_F} \bar{\Sigma}_{aF} \phi_T dv}{\bar{\Sigma}_{aF} V_F}$$

Entonces

$$\int_{V_F} \bar{\Sigma}_{aF} \phi_T dv = \bar{\phi}_{TF} \bar{\Sigma}_{aF} V_F$$

Dado que el número de neutrones absorbidos en el combustible por segundo = $\bar{\Sigma}_{aF} \bar{\phi}_{TF} V_F$ donde $\bar{\phi}_{TF}$ es el flujo térmico promedio en el combustible. Enton-

ces la utilización térmica se puede calcular en reactor heterogéneo de acuerdo a la expresión

$$f = \frac{\overline{\Sigma}_{aF} \overline{\phi}_{TF} V_F}{\overline{\Sigma}_{aF} \overline{\phi}_{TF} V_F + \overline{\Sigma}_{aM} \overline{\phi}_{TM} V_M}$$

$$f = \frac{\overline{\Sigma}_{aF} V_F}{\overline{\Sigma}_{aF} V_F + \overline{\Sigma}_{aM} \zeta V_M}$$

donde el factor de desventaja se define como

$$\xi = \frac{\overline{\phi}_{TM}}{\overline{\phi}_{TF}}, \quad \zeta > 1$$

Para una red de barras de combustible:

$$\frac{1}{f} = \frac{\overline{\Sigma}_{aM} V_M}{\overline{\Sigma}_{aF} V_F} F + E$$

$$F(x) = \frac{x I_0(x)}{2 I_1(x)}$$

$$E(y, z) = \frac{z^2 - y^2}{2y} \left[\frac{I_0(y) K_I(z) + K_0(y) I_I(z)}{I_I(y) K_I(y) - K_I(y) I_I(y)} \right]$$

$$x = \frac{a}{L_F}, y = \frac{a}{L_M}, z = \frac{b}{L_M}$$

a : radio de la barra de combustible

b : radio de la celda equivalente

L_F, L_M : longitud de difusión térmica del combustible y el moderador

Cuando x, y, z son menores que 0.75.

Para barras cilíndricas es válido:

$$F(x) = 1 + \frac{1}{2}\left(\frac{x}{2}\right)^2 - \frac{1}{12}\left(\frac{x}{2}\right)^4 + \frac{1}{48}\left(\frac{x}{2}\right)^6 - \dots$$

$$E(y, \xi) = 1 + \frac{\xi^2}{2} \left[\frac{\xi^2}{\xi^2 - y^2} \ln\left(\frac{\xi}{y}\right) - \frac{3}{4} + \frac{y^2}{4\xi^2} + \dots \right]$$

Probabilidad de escape a la resonancia:

$$P = \exp\left[-\frac{N_F V_F I}{\zeta_M \Sigma_{SM} V_M}\right]$$

$$I = A + \frac{C}{\sqrt{AP}}, \quad P = \text{Densidad del combustible}$$

Los valores de A y C se encuentran en la tabla (6.5) del libro de Lamarsh (1983) así como los valores de $\zeta_M \Sigma_{SM}$ en la tabla (6.6) de Lamarsh (1983).

Factor de fisión rápida:

El factor de fisión rápida como función de la razón volumen de metal al de agua se encuentra en la figura 6.10 del libro de Lamarsh (1983).

Para la misma composición se puede concluir que:

K_∞ para el reactor heterogéneo $>$ K_∞ para el reactor homogéneo.

PROBLEMAS Y PREGUNTAS PARA EL CAPÍTULO 5

1. En un reactor crítico:
 - a) $B_m^2 = B_g^2$
 - b) $B_m^2 > B_g^2$
 - c) $B_m^2 < B_g^2$
 - d) Ninguna de las expresiones anteriores

2. Es la ecuación del reactor en estado estacionario:
 - a) $\nabla^2\phi - (1/L^2)\phi + S/D = (1/V)\partial\phi/\partial t$
 - b) $\nabla^2\phi - (\Sigma_a/D)\phi + K_\infty\phi\Sigma_a/D = (1/V)\partial\phi/\partial t$
 - c) $\nabla^2\phi - (\Sigma_a/D)\phi + K_\infty\phi\Sigma_a/D = 0$
 - d) Ninguna de las respuestas anteriores

3. Expresión para el pandeo (buckling) material:
 - a) $B^2 = (K_\infty - 1)/L^2$
 - b) $B^2 = (\pi/a)^2$
 - c) $B^2 = (\pi/a)^2 + (\pi/b)^2 + (\pi/c)^2$
 - d) Ninguna de las respuestas anteriores

4. Condiciones de frontera (correctas) para la ecuación del reactor y para el caso de un reactor en forma de placa plana de espesor «a» extrapolado, con fuentes uniformemente distribuidas, con el sistema coordenado en el centro del reactor:
 - a) $d\phi/dx = 0, x = 0; \phi(a) = 0$
 - b) $d\phi/dx = 0, x = 0; \phi(0) = 0$
 - c) $d\phi/dx = 0, x = 0; \phi(a/2) = \infty$
 - d) Ninguna de las respuestas anteriores

5. Condiciones de frontera (correctas) para la ecuación del reactor y para el caso de un reactor en forma de placa plana de espesor «a» extrapolado, con fuentes distribuidas no uniformemente, con el sistema coordenado en una de las caras o superficies del reactor:
 - a) $d\phi/dx = 0, x = 0; \phi(a/2) = 0$
 - b) $\phi(0) = 0; \phi(a) = 0$

- c) $d\phi/dx = 0, x = 0; \phi(a) = 0$
 d) Ninguna de las respuestas anteriores
6. En un reactor crítico en forma de placa:
- a) $(\pi/a)^2 = (K_\infty - 1)/L^2$
 b) $3(\pi/a)^2 = (K_\infty - 1)/L^2$
 c) $B_m^2 > B_g^2$
 d) $B_m^2 < B_g^2$
 e) Ninguna de las expresiones anteriores
7. Expresión para el pandeo (buckling) geométrico de un reactor en forma de cubo:
- a) $B^2 = (K_\infty - 1)/L^2$
 b) $B^2 = (\pi/a)^2$
 c) $B^2 = 3(\pi/a)^2$
 d) $B^2 = (\pi/a)^2 + (\pi/b)^2 + (\pi/c)^2$
 e) Ninguna de las respuestas anteriores
8. Un reactor cúbico descubierto de 1,000,000 cm³ de volumen esta compuesto de una mezcla homogénea de plutonio 239 y agua. El reactor opera a un nivel de potencia de 300 MW térmicos. Usando la teoría modificada de un grupo, calcule:
- a) El buckling del reactor
 b) El factor ξ
 c) La masa del moderador
 d) La masa crítica (combustible)
 e) La concentración atómica crítica
9. Un reactor esférico descubierto de 50 cm esta compuesto de una mezcla homogénea de Pu-239 y berilio. El reactor opera a un nivel de potencia de 100 kW térmicos. Usando teoría modificada de un grupo, calcule:
- a) El buckling geométrico
 b) La masa crítica de Pu-239

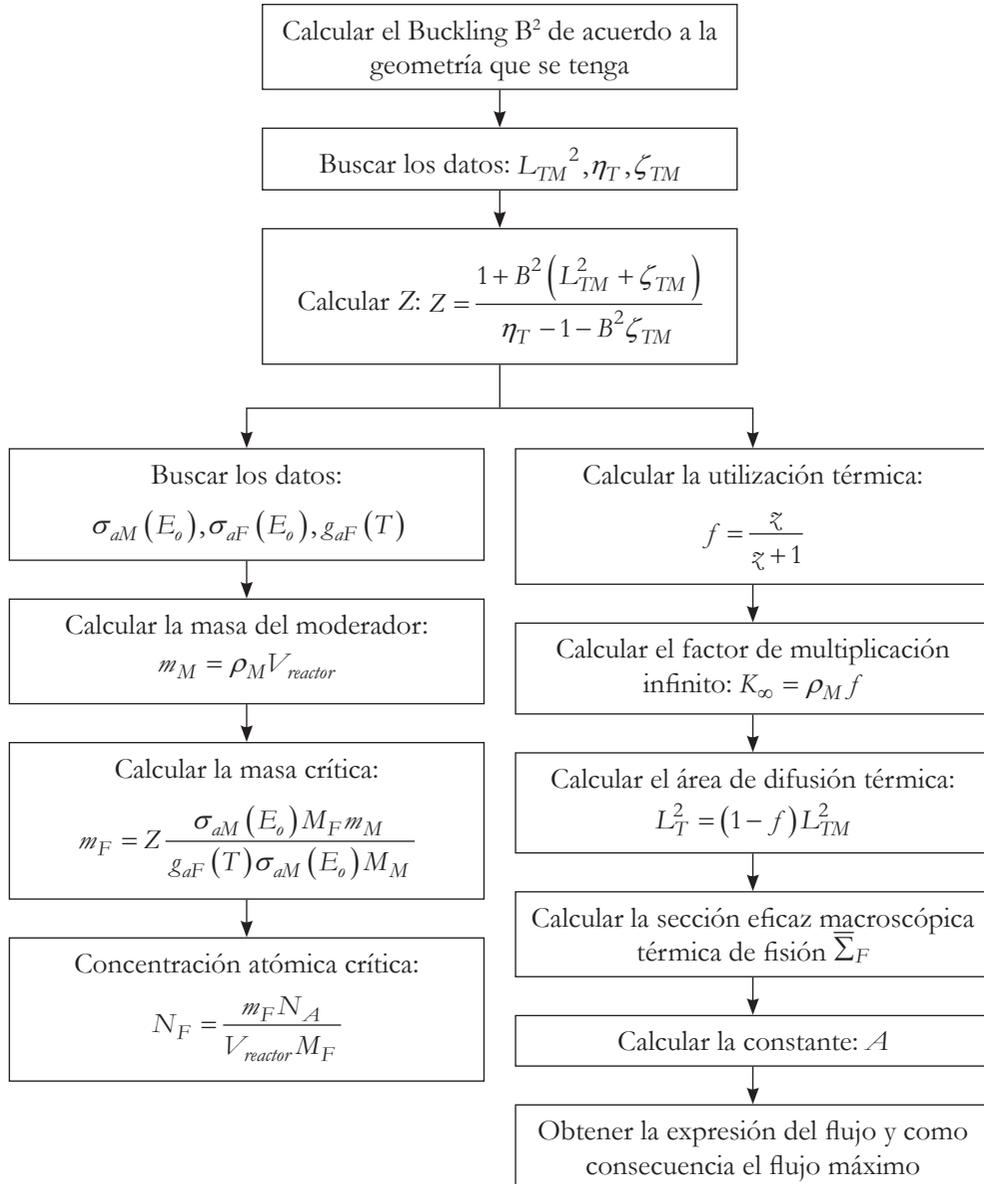
Nota: utilice el diagrama de bloques de cálculos de criticidad que aplique a la situación descrita en este problema (ver el anexo de mapas conceptuales).

ANEXO

MAPAS CONCEPTUALES PARA CÁLCULOS DE CRITICIDAD

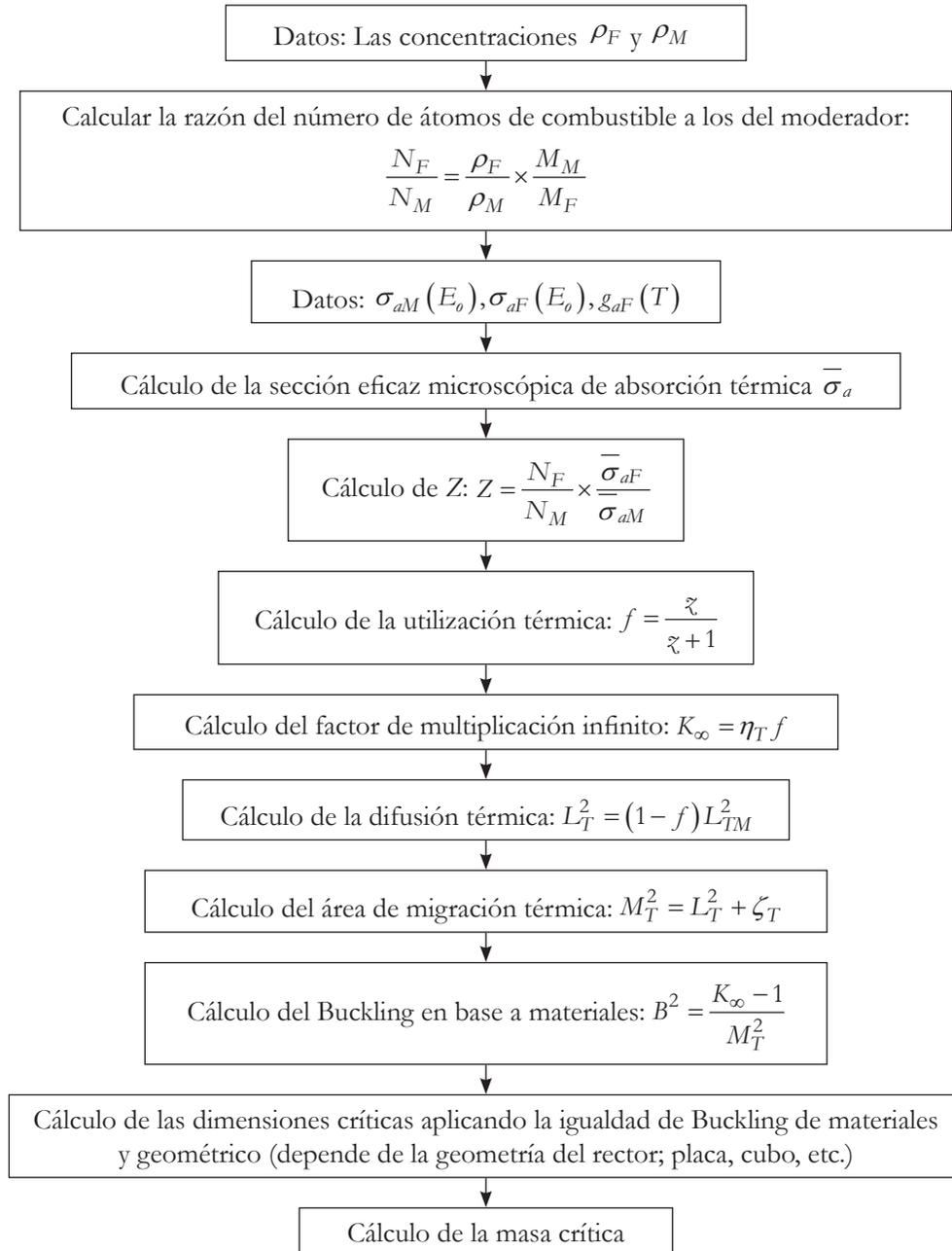
Mapa conceptual 1

Tamaño especificado de un reactor descubierto térmico; consistiendo de una mezcla homogénea de un isótopo fisil y moderador ($\beta = \varepsilon = 1$) por calcularse la composición (masa crítica usando teoría modificada de un grupo).



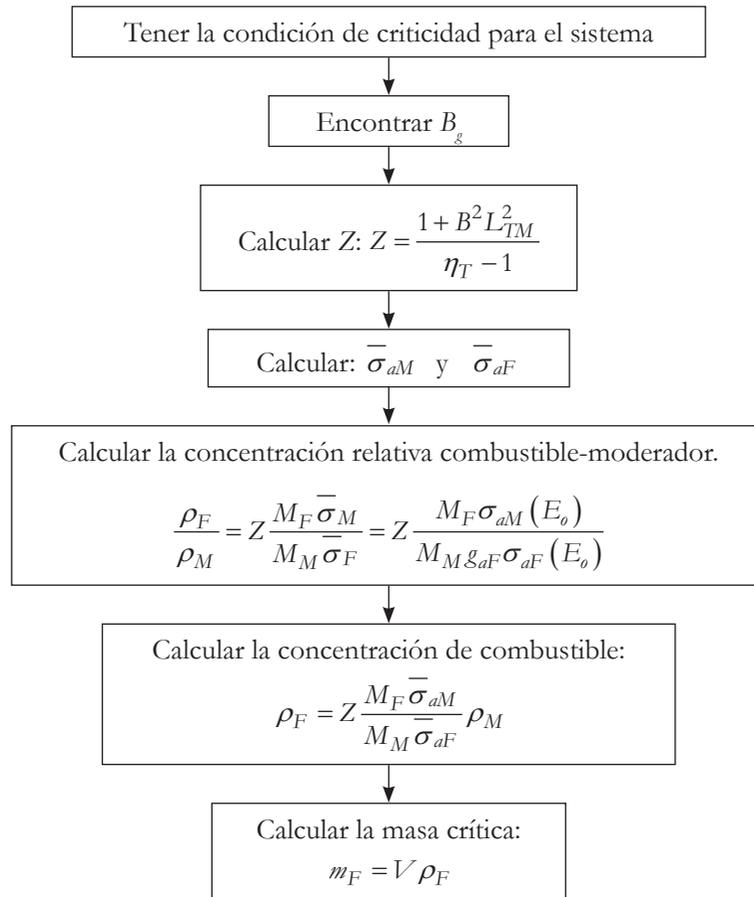
Mapa conceptual 2

Composición especificada del reactor térmico descubierto consistiendo de una mezcla homogénea de isótopo fisil y moderador y calcularse las dimensiones.



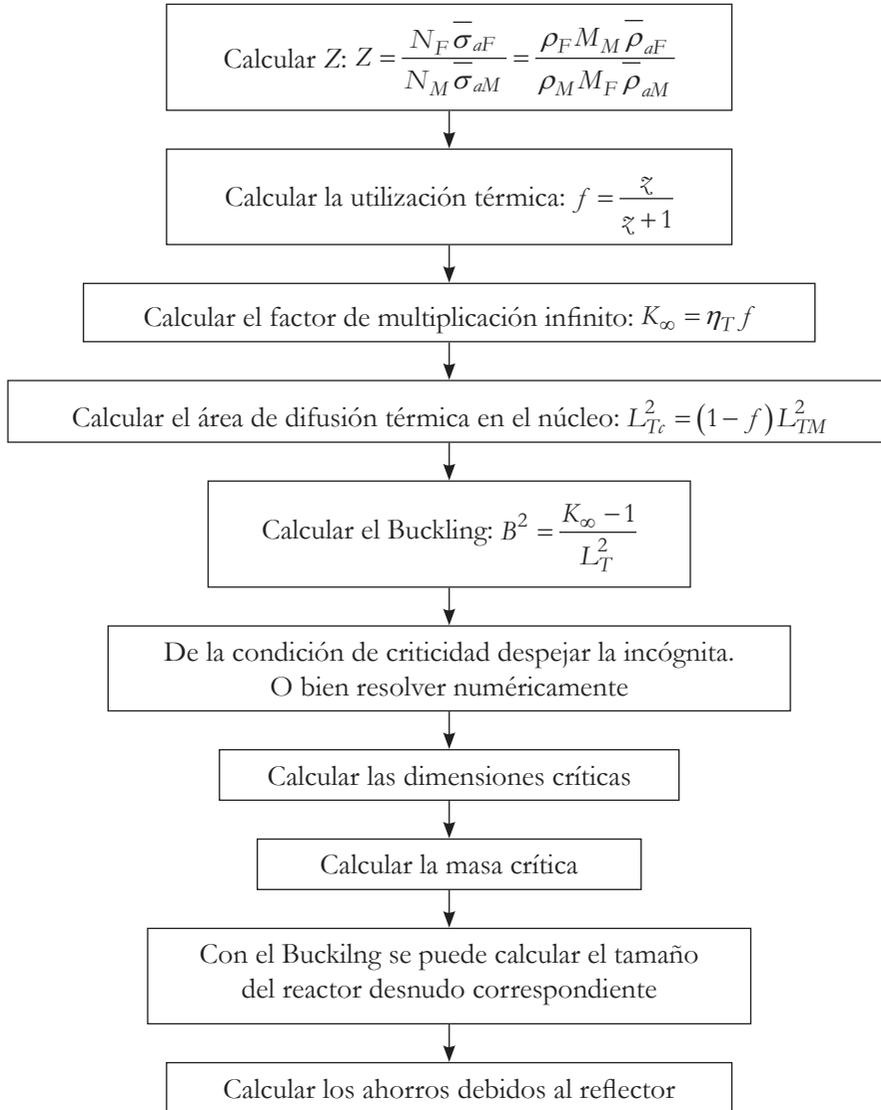
Mapa conceptual 3

Dimensiones específicas para un reactor con reflector (infinito) y por calcularse la concentración para reactores con $\zeta_T \ll L_T^2$. El reactor no está reflejando con agua ligera.



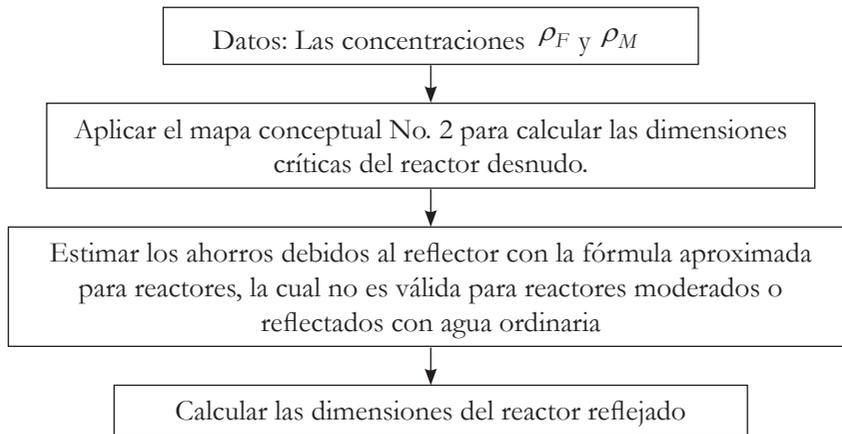
Mapa conceptual 4

Reactor con reflector y moderador en donde $\zeta_T \ll L_T^2$ en el núcleo. Concentración de combustible conocida y por calcularse las dimensiones.



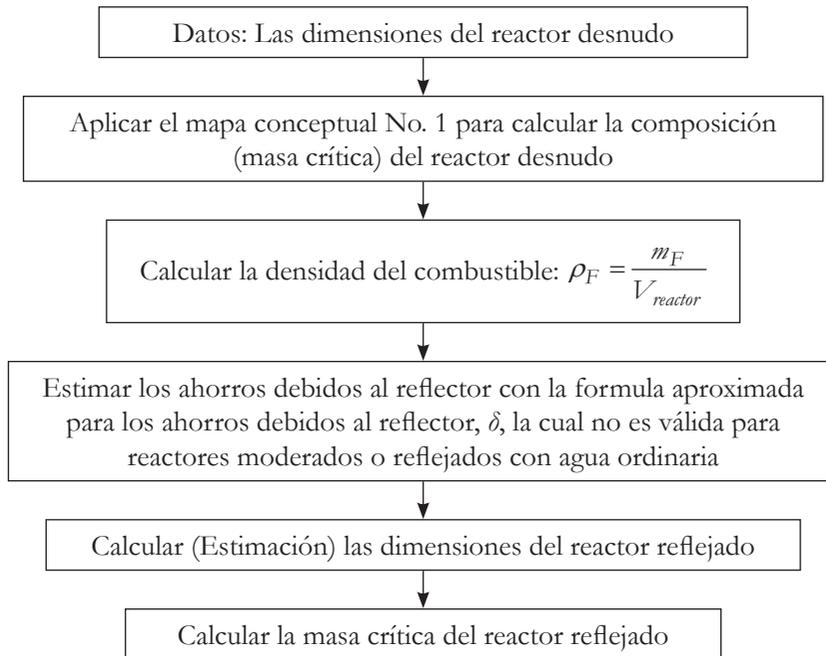
Mapa conceptual 5

Estimación de las dimensiones del reactor reflejado.



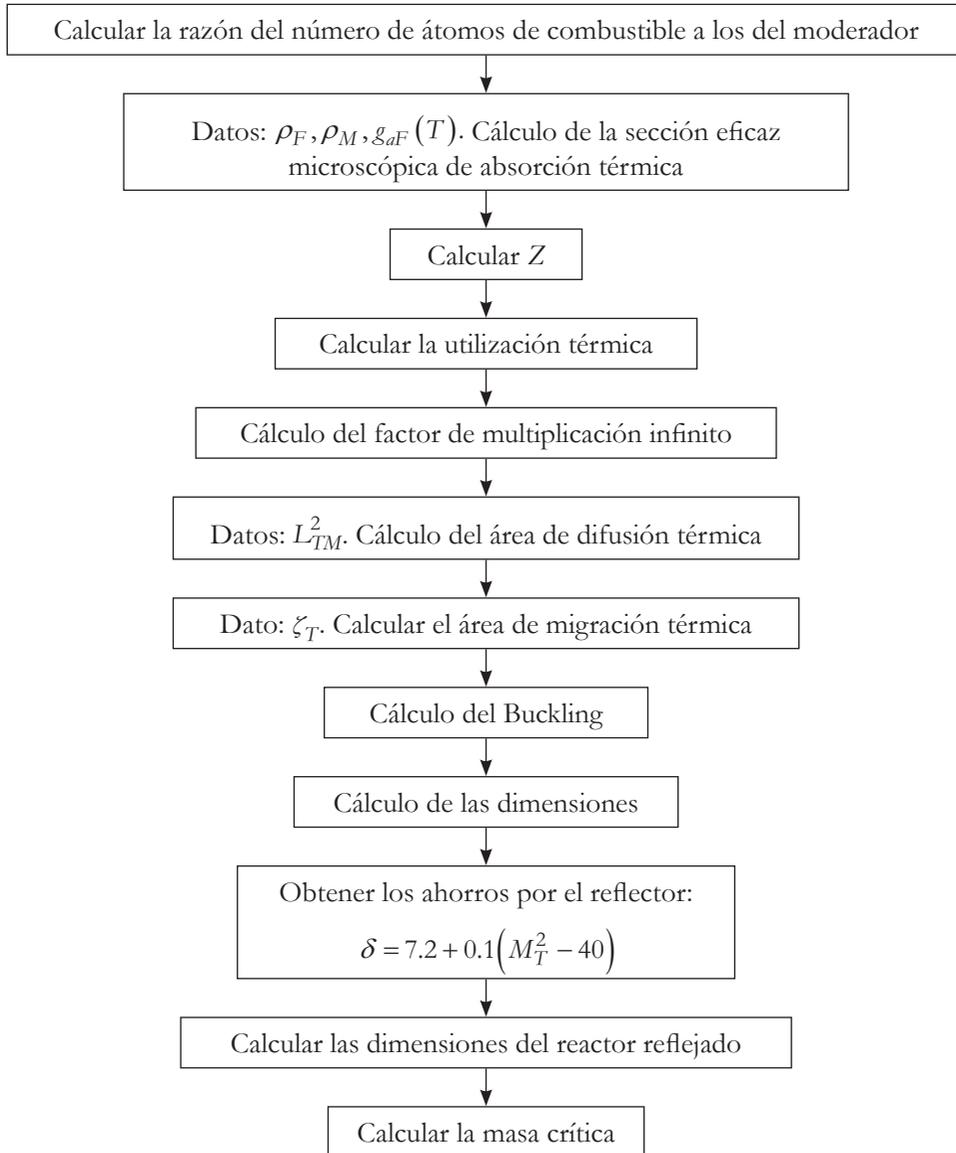
Mapa conceptual 5.1

Estimación de las dimensiones del reactor reflejado.



Mapa conceptual 6

Obtención de los ahorros debidos al reflector y las dimensiones de un reactor moderado y reflejado con agua; dada las concentraciones ρ_F, ρ_M .



BIBLIOGRAFÍA

Arfken, Mathematical Methods for Physicists, Second Edition, Academic Press.

Bell G.I. and Glasstone S., Nuclear Reactor Theory, Litton Educational Publishing, Inc., 1970.

Caro R., Física de Reactores Nucleares, JEN Madrid, 1976.

Duderstad and Hamilton, Nuclear Reactor Analysis, Wiley, 1976.

Espinosa-Paredes G, Vázquez-Rodríguez R., del Valle Gallegos E., Alonso G., Moghaddam N.M., 2013. Fractional-space law for the neutron current density. Annals of Nuclear Energy, vol. 55, 120-125. <http://dx.doi.org/10.1016/j.anucene.2012.12.009>

Espinosa-Paredes G., Vázquez-Rodríguez R., 2011. Application of linear-extended neutron diffusion equation in a semi-infinite homogeneous medium. Annals of Nuclear Energy, vol. 38, 713-719. <http://dx.doi.org/10.1016/j.anucene.2010.11.001>

Foster and Wright, Basic Nuclear Engineering, Third Edition, Allyn & Bacon, 1977.

Glasstone and Sesonke, Nuclear Reactor Engineering, Third Edition, Van Nostrand Reinhold, 1981.

Henry Allan F., Nuclear Reactor Analysis, the MIT Press, 1982.

Lamarsh J.R., Introduction to Nuclear Engineering, 2da Ed., Addison Wesley Co., 1983.

Lamarsh J.R., Nuclear Reactor Theory, Addison Wesley Co., 1966.

Vázquez R.R. y García García G.E., Proyecto Terminal: Aplicación del Código DTF-IV en el Análisis de los Reactores Nucleares, Universidad Autónoma Metropolitana- Iztapalapa, 1982.

Vázquez-Rodríguez R., Espinosa-Paredes G., Morales-Sandoval, J., Vázquez-Rodríguez A. y Espinosa-Martínez E.-G., 2009. Averaging the neutron diffusion equation. Progress in Nuclear Energy, vol. 51, 474-484. <http://dx.doi.org/10.1016/j.pnucene.2008.10.007>

ÍNDICE DE TÉRMINOS

- Agua pesada, 36
Atenuación lineal, 5
Átomos, 2, 7, 13, 23, 59, 160, 165
- Bremsstrahlung, 6
- Captura, 16, 19, 108, 109
Captura radiativa, 16, 109
Colisión elástica, 29
Condiciones de frontera, 64, 70, 71, 76, 96, 97, 100, 114, 121, 122, 142, 149
Corriente de neutrones, 52, 64, 65, 128
- Decaimiento alfa, 4
Decaimiento beta, 5, 6
Deuterio, 2, 40
Difusión de multigrupos, 82
Dispersión elástica, 15, 24
Dispersión hacia arriba, 94
Dispersión inelástica, 16, 38
Distribución de Maxwell, 27, 39
- Ecuación crítica, 127, 129, 131, 135, 136
Ecuación de difusión para un reactor crítico, 119
- Ecuación de Watt, 20, 39
Electrón, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 38
Electrón-Volt, 3
Endotérmica, 12
Energía crítica, 17, 38
Energía de enlace, 4, 17, 18
Energía de excitación, 17, 38
Escape de neutrones del sistema, 47
Escape neto de neutrones, 60
Exotérmica, 12, 38
- Factor de multiplicación efectivo, 43, 129, 130, 132
Factor de multiplicación infinito, 41, 45, 111, 159, 160, 162, 165
Flujo de neutrones, 49, 50, 56, 57, 64, 65, 66, 91, 99, 105, 110, 112, 118, 119, 125, 150
Flujo máximo, 126
Flujo promedio, 126, 141
- Hijo del núcleo padre, 10
- Isobaro, 3
Isótono, 3
Isótopos, 2, 3, 18, 19, 24, 108, 109, 131

- La ley de Fick, 51, 52, 56, 57, 58, 62
 Letargia, 33, 34, 37
 Ley de decaimiento radiactivo, 8
 Longitud de difusión, 64, 80, 136, 153

 Monoenergéticos, 48, 50, 80, 82

 Negatrones, 2
 Neutrón, 1, 2, 5, 15, 16, 17, 18, 21, 22, 25, 28, 30, 31, 32, 34, 35, 36, 38, 39, 40, 42, 43, 49, 60, 80, 81, 82, 84, 93, 94, 105, 108, 109, 110, 111, 128, 130, 132, 136, 149, 151
 Neutrones de fisión, 20, 21, 35, 37, 39, 83, 91, 107, 110, 111, 131, 149
 Neutrones térmicos, 18, 19, 25, 39, 85, 90, 94, 134, 147
 Núcleo, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 15, 16, 17, 18, 19, 22, 30, 31, 38, 39, 43, 46, 80, 82, 94, 108, 109, 119, 141, 142, 147, 148, 151, 162
 Nucleón, 2
 Núclido, 2, 3, 6, 7, 8, 9, 10, 19, 24, 37
 Número de masa, 2, 3, 5, 19, 34, 38
 Número promedio de colisiones requerido para termalizar, 35, 36, 40

 Partícula beta, 2
 Positrones, 2, 6

 Potencia de moderación, 35, 36
 Promedios, 9, 37
 Protio, 2
 Protón, 1, 2, 4, 5

 Radiación gamma, 5
 Razón de moderación, 36
 Reacción de absorción de neutrones, 16
 Reacción de dispersión, 15, 38
 Reactores cuasi-homogéneos, 151, 152
 Reactores heterogéneos, 151, 152
 Reactores homogéneos, 151
 Reactores térmicos, 91, 131

 Sección eficaz, 22, 23, 24, 27, 28, 29, 33, 37, 38, 39, 48, 49, 50, 59, 80, 89, 90, 93, 110, 141, 149, 159, 160, 165
 Sección eficaz macroscópica, 22, 23, 24, 110, 159

 Teoría de multigrupos, 48, 82
 Tritio, 2, 38, 39

 Utilización térmica, 152, 153, 159, 160, 162, 165

 Velocidad relativa, 30
 Vida media de un radioisótopo, 8

AUTORES



GILBERTO ESPINOSA-PAREDES (Cd. De México, 1961) estudió el doctorado en la Universidad Autónoma Metropolitana. En 1998 publicó sus primeros 3 artículos en: I. J. for Numerical Methods in Fluids, Computers & Geosciences, y Transport in Porous Media. Desde entonces ha publicado más de 150 artículos en más de 30 revistas científicas entre ellas Annals of Nuclear Energy, Progres in Nuclear Energy, Nuclear Engineering and Design, Nuclear Science and Engineering Journal, Applied Mathematical Modelling, Physica A, I. J. of Hydrogen Energy, J. of Chemical Physics. Ha recibido, entre otros premios, el Best Paper Award en 2014 por el trabajo *Towards a Stability Monitor in Laguna Verde Nuclear Power Plant Based on the Empirical Mode Decomposition*. En 2012 como Editor Invitado publicó el número especial Severe Accident Analysis in Nuclear Power Plants en la revista Science and Technology of Nuclear Installations. Editor en Jefe de la Revista Energy Research Journal, y Editor Asociado de I. J. of Nuclear Energy Science and Technology, y I. J. of Applied and Computational Mathematics, entre otras. Es Investigador Nacional Nivel 3 de México, Miembro de la Academia de Ingeniería de México y de la Academia Mexicana de Ciencias.



RODOLFO VÁZQUEZ RODRÍGUEZ. Ingeniero en Energía (UAM-I), Maestro en Ingeniería Química (UAM-I) y Doctor en Ingeniería, Campo de Conocimiento Energía (FI-UNAM). Es miembro del Sistema Nacional de Investigadores (Nivel 1) con reconocimiento de perfil PROMEP desde 2008 (ahora PRODEP). Ha colaborado en diversos proyectos de investigación y consultoría abordando diversos temas relacionados con la Física de Reactores Nucleares, Termohidráulica de Re-

actores Nucleares y los Fenómenos de Transporte y el Medio Ambiente. Desde su definitividad en la UAM ha sido colaborador en proyectos de investigación financiados internos y externos a la UAM. Autor y coautor de más de 50 productos de investigación en los que da crédito a la UAM así como asesor de diversos proyectos terminales y de tesis. En la UAM Iztapalapa está contratado actualmente como Profesor Investigador Titular C. Participación universitaria como miembro titular electo en el Consejo Divisional de Ciencias Básicas e Ingeniería de la UAM-I, periodos: 1992-1993 y 2011-2012. Fue miembro del Comité de la Licenciatura de Ingeniería en Energía (2005 a 2011). Fungió como Coordinador de la Licenciatura de Ingeniería en Energía (Noviembre de 1986 a Marzo de 1989), Coordinador de los Laboratorios de Ingeniería Química, Energía e Hidráulica (1992 a 1993), miembro titular de la Comisión Dictaminadora en el área de Ingeniería de la UAM (Noviembre de 2012 a Octubre de 2015) y actualmente Coordinador de la Licenciatura de Ingeniería en Energía, desde Junio de 2015 a la fecha. Premio a la mejor tesis de licenciatura en el área de ciencias y tecnologías nucleares y protección radiológica, 2012, otorgado por la Sociedad Nuclear Mexicana. Estudiante de Ingeniería en Energía: Víctor Castillo Jiménez. Título: Analysis of the interfacial heat transfer process in a pebble fuel. Trabajo co-dirigido con el Dr. Gilberto Espinosa.

Posee más de 20 años de experiencia docente a nivel licenciatura y posgrado impartiendo docencia relacionada con Energía y Medio Ambiente, Fenómenos de Transporte y el Medio Ambiente, así como en la orientación nuclear de Ingeniería en Energía dando cursos de Física de Reactores Nucleares de Fisión y Fusión e Introducción a la Ingeniería Nuclear.

Este libro es el resultado de las clases que se han impartido durante más de 25 años en el curso de **Física de Reactores I** en la Universidad Autónoma Metropolitana, campus Iztapalapa (UAMI) para estudiantes de pregrado en el programa de estudios de Ingeniería en Energía. Es un programa pionero en México en el estudio de fuentes alternas de energía (energía nuclear y energías renovables). No obstante, por el tratamiento de los temas, será de utilidad para otras escuelas o facultades de ingeniería, aunque sus programas difieran un tanto de lo aquí presentado.

El libro se concibió como material de apoyo para un curso de estudiantes no graduados y proporciona las bases, con una revisión de fundamentos de física nuclear, para la comprensión de conceptos claves sobre los que descansa la física de reactores nucleares tales como la interacción de la radiación con la materia, factor de multiplicación, reactividad, teoría de difusión de neutrones. Conceptos cuyo dominio es esencial por parte de todo estudiante interesado en la Ingeniería nuclear.

Con mucha frecuencia los alumnos tienen serias dificultades para comprender los principios básicos de la física de reactores. Esta deficiencia se hace muy evidente durante el proceso de aprendizaje y en la solución de problemas en los que deben aplicar dichos principios. Para ello se presentan ejemplos durante el desarrollo de cada tema. Se pretende ilustrar los conceptos e ideas definidos y al final de cada capítulo se ha incluido una selección de preguntas y problemas propuestos para que el estudiante se entrene y mejore su habilidad en la solución de problemas de cada temática. El material que se desarrolla en este libro se apoya en libros clásicos de la Ingeniería Nuclear.